

Lista 2
Dinâmica: Oscilações Harmônicas e de Lotka
Volterra
data de entrega 11 de maio

Nestor Caticha

24 de abril de 2009

1) Faça um programa para a simulação das equações de Lotka-Volterra (e.g. eqs 2.37 das notas), onde as variáveis são N_t e P_t , o número de presas e predadores respectivamente. Dê um nome do tipo `LotkaVolterraNP09XXYY.m`

(Esse nome, que indica a data no formato AAMMDD, permitirá que saibamos para que serve esse programa daqui a alguns dias)

(1a) Faça um teste usando na equação que determina P_{t+1} o valor de (1b) N_t e (1c) o valor de N_{t+1} . Note a instabilidade. Leia os comentários associados às equações 2.35,36 e 37 no texto.

Escolha a opção que dá mais estabilidade e:

(1d) Faça gráficos de N_t e P_t como função do tempo. (1e) Faça outro gráfico de N_t contra P_t para ver os ciclos.

para diferentes valores de m e s . Mantenha l e r fixos.

2) Verifique o valor de equilíbrio de N^* e P^*

3) Escreva outro programa (e.g. `LotkaVolterraSeuNome090410.m`) para simular as equações 2.40 e 2.41 para as variáveis X_t e Y_t .

(3a) Verifique qual é o ponto fixo desse sistema e responda as questões a seguir.

Coloque a população de presas no equilíbrio. Perturbe o valor inicial dos predadores para (3b) acima e (3c) para abaixo do valor de equilíbrio. Descreva o efeito imediato nas presas e predadores

Faça o mesmo, partindo do valor de equilíbrio dos predadores e perturbe o valor inicial das presas (3d) para acima e (3e) para abaixo do valor de equilíbrio.

4) Considere um sistema no equilíbrio. Alguma perturbação no sistema diminui as populações por fatores iguais $f < 1$, i.e. as populações partem de um valor igual ao de equilíbrio vezes f . Simule nestas condições e discuta o efeito de tal redução nas presas e nos predadores.

5) Verifique os quatro casos C_1, C_2, C_3 e C_4

6) Linearização: faça um novo programa (e.g. LotkaVolterraLinear090410.m) que implemente as equações para quantidades u_t e w_t que descrevem o quanto X e Y se afastam dos valores de equilíbrio: $X = 1 + v$ e $Y = 1 + w$

$$v_t = v_{t-1} - rw_{t-1} - rv_{t-1}w_{t-1} \quad (1)$$

$$w_t = w_{t-1} + lv_t + lv_t w_{t-1} \quad (2)$$

que são equivalentes aos sistemas simulados anteriormente.

(6a) Calcule no programa $E_t = \frac{v_t^2}{2r} + \frac{w_t^2}{2l}$ e faça um gráfico de E_t como função do tempo para diferentes valores de r e l .

(6b) Considere agora o novo sistema linearizado

$$v_t = v_{t-1} - rw_{t-1} \quad (3)$$

$$w_t = w_{t-1} + lv_t \quad (4)$$

que 2.65 e 2.66 obtidas desprezando os termos não lineares das equações de LV. Faça um gráfico de E_t como função do tempo para diferentes valores de r e l .

Brinque com diferentes valores iniciais e veja que os resultados são parecidos aos do item (6a) para valores pequenos dos valores iniciais.

(6c) Mais difícil: Mostre que a dependência do período de oscilações T é aproximadamente dado pela equação 2.64

7) As equações acima servem para descrever um sistema simples. Serve de ponto de partida para modelagem mais ousada.

(7a) Considere que há interações com outros fatores. Podemos modelar efeitos aleatórios usando a função `rand` do octave, que gera um número entre zero e um. Brinque um pouco com essa função.

Modifique um dos programas acima e simule as equações

$$v_t = v_{t-1} - rw_{t-1} - rv_{t-1}w_{t-1} + a(rand - \frac{1}{2}) \quad (5)$$

$$w_t = w_{t-1} + lv_t + lv_t w_{t-1} + b(rand - \frac{1}{2}) \quad (6)$$

onde a e b representam as intensidades das interações com outros fatores não especificados no modelo. Brinque com essas intensidades: simule com níveis diferentes de ruído.

8) Considere outras relações entre espécies (simbiose, parasitismo, etc). Proponha modelos matemáticos para descrever essas interações.

9) Considere situações em que duas espécies presa competem entre si por recursos

(9a) escreva as equações da dinâmica. (9b) Simule - as sem ruído , (9c) com ruído.

10) Adicione ao sistema acima um predador.

(10 a) Escreva as equações. (10 b) Simule - as sem ruído , (10 c) com ruído.

Ruído pode ser gerado em Octave usando a função `rand`. Esta gera números aleatórios ¹ uniformemente entre zero e um.

Discuta seus resultados.

Extra: Pense numa situação de interesse biológico para a interação de espécies e simule: invente as equações. Divirta-se ao fazer pesquisa.

1 Exercício sobre mudanças no intervalo de tempo de observação

As equações que estamos resolvendo incluem uma escolha da escala discreta de tempo. O que significam t e $t+1$? Isso depende do problema em particular, e.g. das espécies que estamos modelando. Por exemplo ao estudar ácaros podemos escolher que esse intervalo equivale a 17 horas. Uma vez feita essa escolha o significado de r e l está fixo. O primeiro descreve o aumento relativo de presas na ausência de predadores num intervalo de tempo entre t e $t + 1$. O segundo, o decaimento relativo dos predadores na ausência de presas.

Suponha agora que seja desejável observar o sistema em tempos intermediários, por exemplo em $t + \Delta t$. O valor de Δt pode ser qualquer coisa, por exemplo bem pequeno. Como se alteram as equações da dinâmica? Discuta porque é razoável escrever

$$v_{t+\Delta t} = v_t - rw_t\Delta t \quad (7)$$

$$w_{t+\Delta t} = w_t + lv_t\Delta t \quad (8)$$

e portanto

$$\frac{v_{t+\Delta t} - v_t}{\Delta t} = -rw_t \quad (9)$$

$$\frac{w_{t+\Delta t} - w_t}{\Delta t} = lv_t \quad (10)$$

¹pseudo-aleatórios

e se tomarmos o limite de $\Delta t \rightarrow 0$, podemos então escrever a dinâmica em termos de derivadas. Obtemos assim as seguintes equações diferenciais:

$$\frac{dv_t}{dt} = -rw_t \quad (11)$$

$$\frac{dw_t}{dt} = lv_t \quad (12)$$

As equações 7 e 8 servem como aproximações das equações diferenciais, e estão numa forma útil para o cálculo numérico no computador. Note que ?? e 12 são úteis para cálculo analítico.

Calcule no programa $E_t = \frac{v_t^2}{2r} + \frac{w_t^2}{2l}$.

Faça isso para $\Delta t = 0.1$ e para $\Delta t = 0.01$. Note que para que o mesmo intervalo de tempo seja percorrido, o número de passos do programa deveria ser aumentado. Para isso divida o número de passos por Δt . O que acontece com as flutuações de E_t quando o intervalo Δt decresce?

2 Comentários Aleatórios

Para gerar arquivos com os gráficos use o comando `print -deps nomedescriptivo09XXYY.eps`
ou

```
print -dpng nomedescriptivo09XXYY.png
```

dentro do *octave* onde `nomedescriptivoAAMMDD.png` é o nome do arquivo que contém a figura. Você escolhe o tipo de arquivo gráfico (eps ou png, talvez o eps seja melhor mas é mais simples usar o png...que fica recomendado para os que querem simplicidade). A sugestão é que AA, MM DD sejam substituídos por ano, mês e dia, respectivamente.

Lembre de usar o comando `figure(n)` para gerar a n -ésima figura (só é necessário para mais de uma figura).