Lista 3
Dinâmica: Circuitos Elétricos e Modelos de Neurônios
data de entrega 25 de junho

Nestor Caticha

5 de junho de 2009

Entregue durante a aula impresso em papel. Não haverá possibilidade de atraso pois o semestre vai acabar.

1) A função Exponencial.

Considere o circuito RC, onde o capacitor descarrega a partir de $t = 0$. O estudo de equações de diferenças nos levou a encontrar soluções exponenciais onde aparece o intervalo Δt. Queremos estudar o comportamento de

$$(1 - \frac{\Delta t}{RC})^{\frac{t}{\Delta t}} \tag{1}$$

quando $\Delta t \to 0$. Podemos escrever em termos de n, o numero de passos da dinâmica discreta para que se atinja um valor finito do tempo t, o que significa que devemos estudar

$$(1 + a\frac{1}{n})^n \tag{2}$$

quando $n \to \infty$ e $a = -t/RC$

Exercício 1a Faça um programa no computador (e.g. em Octave) e calcule $e_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ para valores de $n = 1, 2, 4, 8, \ldots 2^n$ até 2^{10}.

Faça uma figura de de e_n contra n. Note que efetivamente parece que é atingido um limite. De fato a figura só sugere, mas não prova, que é atingido um limite (Procure um livro de cálculo para a prova). O limite é denotado pela letra e. O valor de $e \approx 2.71828$.

Isto nos permite definir a função exponencial escrita como e^x ou $\exp(x)$, usando o limite

$$e^x = \lim_{n\to\infty}(1 + x\frac{1}{n})^n \tag{3}$$

Exercício 1b Use a função exponencial e^x definida no computador (em Octave `exp (x)`) e compare com o programa do exercício anterior modificado para calcular a expressão $(1 + x\frac{1}{n})^n$ para valores grandes de n (por exemplo $n = 1000$). Faça isso para $x = 1$, ,3 e 5. Note que a argumento

da função exponencial é *adimensional* ou seja um número sem unidades. Se as tivesse, a função dependeria das unidades usadas. Mas estamos interessados no crescimento (ou diminuição) exponencial da carga com o tempo. O tempo é medido em segundos: não é adimensional. A função terá a forma $f(t) = f_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, onde τ (leia *tau*, letra `t` em grego) é chamado o tempo característico ou constante de tempo. τ tem dimensões de tempo e a razão t/τ é adimensional. Se fizermos um gráfico de curvas exponenciais, não em função de t, mas de t/τ as curvas serão independentes de τ: todas cairão no mesmo lugar. τ mede o tempo para que a função $f(t)$ decresça até o valor de $e^{-1} \approx 0.3679$.

Há um certo conjunto de propriedades que são muito úteis e se recomenda ao estudante que as estude mais profundamente [1].

Com tudo isto temos que a a carga, como função do tempo é

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}} \tag{4}$$

Exercício 1c Faça gráficos da carga no capacitor $Q(t)$ usando a equação acima e usando a equação de diferenças $Q(t + \Delta t) = Q(t) - \frac{\Delta t}{RC} Q(t)$, que descreve um circuito RC descarregando. Faça ajuste dos eixos para que os dois gráficos sejam aproximadamente iguais.

2)Modelo de neurônio (a) Faça um programa `FHNZERO.m` para simular o circuito RLC

$$I(t + \Delta t) \quad = \quad I(t) - \frac{R\Delta t}{L} I(t) - \frac{\Delta t}{C} Q(t) \tag{5}$$

[1] O Logaritmo natural $\ln y$ de $y > 0$ é definido como a função inversa da exponencial: Se $e^x = y$, então por definição $\ln y = x$.

Prove, durante suas férias de julho, que

- $e^a e^b = e^{a+b}$
- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- Derivada $\frac{d(e^x)}{dx} = e^x$, a derivada ou taxa de variação da função exponencial é a própria função exponencial.
- $\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}$,
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln x$,

$$Q(t+\Delta t) = Q(t) + I(t)\Delta t \tag{6}$$

Note que estas equações são idénticas a

$$\begin{aligned} \Delta v &= -av - rw, & (7) \\ \Delta w &= v, & (8) \end{aligned}$$

portanto não é difícil modificar programas anteriores para verificar isto. Um valor razoável de a é 1. Faça gráficos para $v(t)$ e de $w(t)$ contra o tempo. Use como condição inicial $v(0) = 1.$ e $w(0) = 1.$. VOcê pode estudar outras condições iniciais.

Mude de brincadeira o sinal de a. A "resistência" é negativa....Note que na sua simulação a corrente não vai a zero, mas cresce (o sistema *explode* de forma exponencial). Suponha que a não é constante, mas oscila tomando valores ora positivos, ora negativos. O que acontece? Voce pode pensar num mecanismo para fazer resistências mudar com o tempo? Pense em canais.

O modelo de FitzHugh-Nagumo é dado pelas equações

$$\begin{aligned} \varepsilon\frac{dv}{dt} &= v(v-a)(1-v) - w + I & (9) \\ \frac{dw}{dt} &= v - w - b & (10) \end{aligned}$$

(5) Programa `FHN01.m`: Modifique o seu programa `FHNZERO.m` para poder simular o modelo FHN:

$$\begin{aligned} v(t+\Delta t) &= v(t) + \Delta t(v(t)(v(t)-a)(1-v(t)) - w(t) + I)/\varepsilon & (11) \\ w(t+\Delta t) &= w(t) + \Delta t(v(t+1) - pw(t) - b) & (12) \end{aligned}$$

Uma boa escolha para os parâmetros é
$\varepsilon = .005, a = .5$,(unidades de décimos de volt) $b = .15, I = .04\mu A$ até $.2\mu A$

- Comece a iterar (integrar) com $I = 0$ e itere as equações para que o sistema entre em equilíbrio. A partir desse ponto faça então a corrente diferente de zero. Estude o efeito de valores de I entre $I = .04\mu A$ e $.2\mu A$. Não faça 500 gráficos. Estude um conjunto de valores que exemplifique os diferentes comportamentos. Veja as figuras nas notas de aula. Faça um gráfico, no espaço de fases (v, w), das isóclinas nulas (curvas $dv/dt = 0$ e $dw/dt = 0$. Nesse mesmo gráfico trace a curva $w(v)$ (veja as notas de aula).

- Escolha uns 4 valores interessantes de I e faça gráficos da evolução temporal de v e w para valores de $I = .04\mu A$ até $.2\mu A$.
- Desafio: Discuta a estabilidade do ponto fixo no cruzamento das isóclinas nulas para os diferentes regimes.

(6) Desafio: Faça um programa para simular o modelo de Morris Lecar

(7) Desafio desafiador: faça um programa para simular o modelo de Hodgkin-Huxley.

1 Comentários Aleatórios

Para gerar arquivos com os gráficos use o comando `print -deps nomedescritivo09XXYY.eps` ou

`print -dpng nomedescritivo09XXYY.png`

dentro do *octave* onde `nomedescritivoAAMMDD.png` é o nome do arquivo que contém a figura. Voce escolhe o tipo de arquivo gráfico (eps ou png, talvez o eps seja melhor mas é mais simples usar o png....que fica recomendado para os que querem simplicidade). A sugestão é que `AA`, `MM` `DD` sejam substituidos por ano, mês e dia, respectivamente.

Lembre de usar o comando `figure(n)` para gerar a $n-$ésima figura (só é necessário para mais de uma figura).