

# Prova Física para C. Biológicas. Entregar 25 de junho 2009

5 de junho de 2009

*A prova é com consulta a livros e notas de aula, mas é individual.*

**A nota de saída é de -10 pontos.**

**Questão 0** Você fez a prova individualmente? (Dica: A resposta *Sim* vale 10 pontos, a resposta *Não* ou a ausência de resposta vale zero pontos.)

**Questão (1)** No modelo de Lotka-Volterra, as presas  $x$  evoluem no tempo segundo a equação

$$x_{t+1} = x_t + r(1 - y_t)x_t$$

e os predadores  $y$ , de acordo com

$$y_{t+1} = y_t - l(1 - x_t)y_t$$

onde  $r$  e  $l$  são constantes positivas e as populações são medidas em unidades tal que o valor de equilíbrio é 1.

**(1a)** Mostre que para pequenos desvios,  $v$  da quantidade de presas, e  $w$  da quantidade de predadores, em relação à população de equilíbrio, a dinâmica acima pode ser aproximada por

$$v_{t+1} = v_t - rv_t \quad \text{presas} \quad (1)$$

$$w_{t+1} = w_t + lw_t \quad \text{predadores} \quad (2)$$

**meio pto.**

**(1b)** Durante a 2a guerra mundial houve uma diminuição da pesca como um todo (ou seja, tanto de peixes-predadores como peixes-presas). Suponha que no período anterior à guerra, a população estivesse no seu valor de equilíbrio e que logo após a guerra, tomado aqui como instante inicial (instante zero), os efeitos da diminuição da pesca tenham se manifestado de maneira a alterar ambos (predadores e presas) de uma mesma quantidade (pequena!) em relação ao equilíbrio. Qual é a previsão do modelo de L.V. sobre a evolução da população dos predadores e das presas (diminuem, aumentam?) em um período posterior?

**meio pto.**

**(1c)** (um ponto) Justifique sua resposta por meio das equações acima. **1 pto.**

**Questão (2)** F.E. Smith sugeriu um modelo semelhante, mas diferente do mapa logístico para descrever o comportamento do número de indivíduos em uma espécie cujo crescimento é limitado por alimento. Neste modelo, a taxa de crescimento  $R(N)$  é dada por:

$$R(N) = a - bN - c(\Delta N)$$

onde  $\Delta N = N_{t+1} - N_t$  e  $a, b, c$  são constantes positivas.

- (a) interprete a forma acima para  $R(N)$ ; **meio pto.**
- (b) escreva o mapa discreto que relaciona  $N_{t+1}$  com  $N_t$  neste caso. **meio pto.**
- (c) determine a população de equilíbrio  $N^*$  e comente porque não depende de  $c$ . **1 pto.**

### Questão 3

- **Considere os circuitos das figuras 1 e 2.** A resistência  $R$ , a capacitância  $C$  e a indutância  $L$  são dadas.
- **(3a)** Escreva a equação que descreve a evolução temporal da corrente no circuito da figura 1A. Diga qual é o princípio que permite escrever esta equação. **meio pto.**  
 Considere o Caso 1 (fig C) : A indutância e a bateria são removidas e substituídas por um condutor,  $C$  e  $R$  tem valores não nulos. Inicialmente o capacitor está carregado com carga  $Q_o$  e em  $t = 0$  a chave (não mostrada na figura) é fechada.
- **(3b)** Encontre a carga no capacitor como função do tempo. **meio pto.**
- **(3c)** Encontre a corrente como função do tempo. **meio pto.**
- **(3d)** Esboce um gráfico da carga como função do tempo. **meio pto.**  
 Suponha que se deseja tornar o circuito mais rápido, i.e. diminuir a constante de tempo para a metade.
- **(3e)** Proponha um novo valor da resistência  $R$  (mantido o capacitor fixo). **meio pto.**
- **(3f)** Calcule o valor novo da capacitância (mantidas as resistências fixas) para diminuir o tempo característico por um fator 2. **meio pto.**

**Questão 4** Considere o circuito da fig D: A resistência é substituída por um fio condutor. A indutância e a capacitância são mantidas. A carga no instante inicial tem valor  $Q_0$ .

- **(4a)** Encontre a evolução temporal de corrente. **1 pto.**  
 Considere o circuito da fig E: O capacitor é substituído por um fio condutor.  $R$  e  $L$  tem valores não nulos. A corrente inicial é  $I_o$

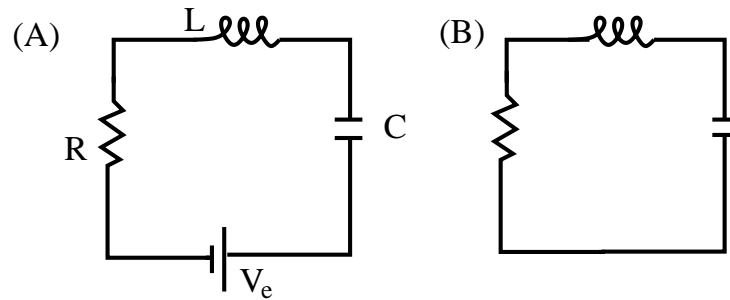


Figura 1: Circuitos RLC

- **(4b)** Encontre a corrente como função do tempo. **1 pto.**
- **(4c)** (OPTATIVO) **2 pto.** Considere o circuito RLC ( fig F) forçado por um potencial  $V_{fem} = V_0 \cos(\omega t)$ . Encontre a amplitude da corrente no circuito como função da frequência da fonte  $\omega$  e dos parâmetros do circuito (R, L e C).

**Questão (5)** Considere uma célula de raio  $r$ , capacitância específica  $c$  (microFarads por cm quadrado) e carga total  $Q$  na superfície externa e  $-Q$  na interna. Calcule a diferença de potencial entre o meio intercelular e intra celular. **1 pto**

### fórmulas

$$\frac{d \cos(\omega t)}{dt} = -\omega \sin(\omega t), \quad \frac{d \sin(\omega t)}{dt} = \omega \cos(\omega t), \quad \frac{d \exp(\gamma t)}{dt} = \gamma \exp(\gamma t),$$

$$\exp(i\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$$

Para  $x$  e  $y$  reais,  $z = x + iy$

$$\exp(z) = \exp(x) \exp(iy) = \exp(x)(\cos y + i \sin y)$$

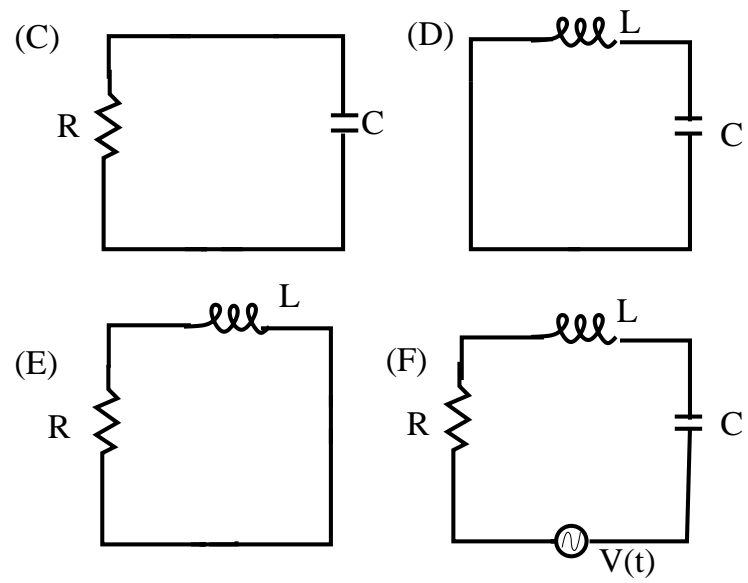


Figura 2: Circuitos RC, LC, RL e RLC forçado por uma fonte periódica