

FEP 0111 (diurno) - Quarta lista de exercícios

1. (a) A posição da partícula é descrita pelo vetor

$$\vec{r} = r \cos \theta \hat{i} + r \sin \theta \hat{j},$$

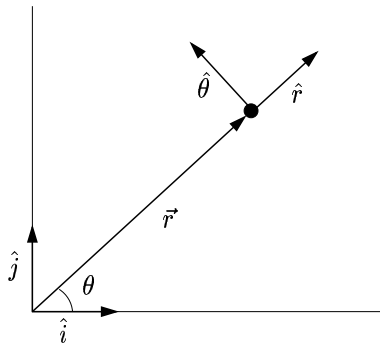
de modo que o vetor unitário radial é

$$\hat{r} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}.$$

O vetor unitário $\hat{\theta}$ é transversal a \hat{r} , e está portanto a um ângulo θ do eixo vertical, sendo dado por

$$\hat{\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}.$$

(Verifique que os sinais das componentes estão corretos!)



Queremos escrever a velocidade da partícula na forma

$$\vec{v} = v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta}.$$

Para isso, vamos lembrar que

$$\vec{r} = r \hat{r},$$

e, levando em conta que os vetores \hat{r} e $\hat{\theta}$ variam com a posição, calcular \vec{v} como

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{r} + r \frac{d\hat{r}}{dt}.$$

Mas

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = -\sin \theta \frac{d\theta}{dt} \hat{i} + \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \hat{j} = \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta},$$

de modo que

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \hat{r} + r \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta},$$

e extraímos diretamente

$$v_r = \frac{dr}{dt} \quad \text{e} \quad v_\theta = r \frac{d\theta}{dt}.$$

O momento angular da partícula, em relação à origem, é

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m \vec{r} \times \vec{v} = m r \vec{r} \times (v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta}) = m r v_\theta \hat{k},$$

já que $\hat{r} \times \hat{r} = 0$ e $\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$. Logo, vemos que

$$\ell = |\vec{\ell}| = m r v_\theta.$$

(b) A energia mecânica da partícula é

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(r).$$

Utilizando expressão para ℓ derivada no item anterior, podemos escrever

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = v_r^2 + \frac{\ell^2}{m^2 r^2},$$

de modo que

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{1}{2}m \cdot \frac{\ell^2}{m^2 r^2} + U(r) \\ &= \frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} + U(r), \end{aligned}$$

e assim E pode ser escrita na forma

$$E = \frac{1}{2}mv_r^2 + V_{\text{ef}}(r),$$

com o potencial efetivo dado por

$$V_{\text{ef}}(r) = U(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2}.$$

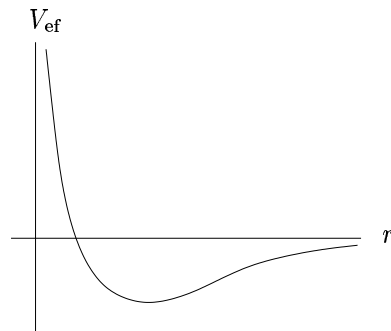
(c) O potencial $U(r)$ que descreve a atração gravitacional entre duas partículas é

$$U(r) = -\frac{GMm}{r},$$

de modo que o potencial efetivo fica dado por

$$V_{\text{ef}}(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2}.$$

Para $r \rightarrow 0$, o termo em $1/r^2$ tem módulo maior que o termo em $-1/r$, de modo que $V_{\text{ef}}(r) \rightarrow +\infty$; para $r \rightarrow +\infty$, o termo em $1/r^2$ cai a zero mais rapidamente que o termo em $-1/r$, e então $V(r) \rightarrow 0^-$. Derivando $V_{\text{ef}}(r)$ com respeito a r e igualando o resultado a zero, vemos que $V_{\text{ef}}(r)$ exibe um mínimo em $r = \ell^2/GMm^2$. Um esboço do gráfico de $V_{\text{ef}}(r)$ é mostrado na figura ao lado.

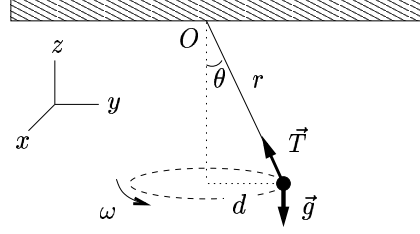


2. Antes de mais nada, vamos calcular a relação que existe entre a velocidade angular ω da bolinha e o raio d da trajetória circular. Como a partícula se mantém em trajetória circular com velocidade angular ω numa altura fixa, temos

$$T \cos \theta = mg \quad \text{e} \quad T \sin \theta = m\omega^2 d,$$

sendo \vec{T} a tração no fio e θ o ângulo entre o fio e o eixo vertical. Temos então

$$\omega = \left(\frac{g \tan \theta}{d} \right)^{1/2}. \quad (1)$$



Medindo o momento angular da bolinha com relação ao ponto O , temos

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v},$$

sendo r o comprimento do fio e v a velocidade da bolinha. Como a orientação do plano definido por \vec{r} e \vec{v} muda ao longo do movimento, a direção de $\vec{\ell}$ também muda; entretanto, sabemos que

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}_{\text{cp}},$$

já que a força centrípeta $\vec{F}_{\text{cp}} = \vec{T} + m\vec{g}$ é a resultante das forças que atuam sobre a bolinha. Das propriedades do produto vetorial, vemos que o torque $\vec{\tau}$ é, a cada instante, tangente à trajetória da bolinha, e portanto não tem componente ao longo do eixo vertical. Assim, o momento angular ao longo dessa direção é conservado. Chamando esse eixo de z , temos

$$\ell_z = m (r_x v_y - r_y v_x) = \text{constante}.$$

Calculando ℓ_z no momento em que a bolinha cruza o eixo y em seu lado positivo, temos $r_x = 0$, $r_y = d$, $v_x = -\omega d$ e $v_y = 0$, de modo que

$$\ell_z = m\omega d^2.$$

Quando o fio é puxado de um certo comprimento $\Delta r = r - r'$, o ângulo entre o fio e o eixo z torna-se θ' e a velocidade angular, ω' .

(a) Da conservação de ℓ_z , temos

$$m\omega d^2 = m\omega' d'^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega'}{\omega} = \left(\frac{d}{d'} \right)^2. \quad (2)$$

Lembrando da Eq. (1) e da relação $d' = r' \sin \theta'$, podemos escrever

$$\left(\frac{d \operatorname{tg} \theta'}{d' \operatorname{tg} \theta}\right)^{1/2} = \left(\frac{d}{d'}\right)^2 \Rightarrow \frac{\operatorname{tg} \theta'}{\operatorname{tg} \theta} = \frac{d^3}{d'^3}$$

$$\Rightarrow r' = \left(\frac{\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \theta'}\right)^{1/3} \cdot \frac{d}{\sin \theta'}.$$

Com $d = 0,5 \text{ m}$, $\theta = \pi/6$ e $\theta' = \pi/3$, temos

$$r' = \frac{1}{3^{1/3} \cdot 3^{1/2}} \simeq 0,4 \text{ m},$$

e o fio foi puxado de

$$\Delta r = r - r' = \frac{d}{\sin \theta} - r' = 0,6 \text{ m}.$$

(b) Da Eq. (2) temos

$$\frac{\omega'}{\omega} = \left(\frac{d}{d'}\right)^2 = \left(\frac{d}{r' \sin \theta'}\right)^2 \simeq 2,08,$$

ou seja, a velocidade angular mais que dobra.