

FEP 0111 (noturno) - Sétima lista de exercícios

1. O torque resultante sobre o cilindro é

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i,$$

e está relacionado ao momento de inércia I do cilindro e à aceleração angular $\vec{\alpha}$ por

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha}.$$

Supondo da figura (ver lista) que todas as forças são tangenciais ao movimento do cilindro, e definindo como positivo um torque que aponta para fora do papel (sentido que vamos associar a um vetor unitário \hat{k}), temos então

$$\hat{k}(R_2 F_1 - R_2 F_2 - R_1 F_3) = \frac{1}{2} M R_2^2 \vec{\alpha}.$$

Com $R_1 = 5,0$ cm, $R_2 = 12$ cm, $F_1 = 5,0$ N, $F_2 = 4,0$ N, $F_3 = 2,12$ N e $M = 1,90$ kg, temos

$$\hat{k}(12 \cdot 5 - 12 \cdot 4 - 5 \cdot 2,12) \cdot 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m} = \vec{\alpha} \frac{1}{2} \cdot 1,9 \cdot 144 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\Rightarrow \vec{\alpha} = 1,02 \cdot 10^2 \text{ rad/s}^2 \hat{k}$$

2. As duas polias estão associadas num sistema rígido, de modo que se movem com a mesma aceleração angular α . Chamando de T_1 e T_2 as trações nos fios conectados aos blocos de massa m_1 e m_2 , respectivamente, a aplicação da segunda lei de Newton aos dois blocos e às polias fornece

$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \\ T_2 - m_2 g = m_2 a_2 \\ R_1 T_1 - R_2 T_2 = I \alpha \end{cases},$$

em que I é o momento de inércia total das duas polias. Como não há deslizamento, as acelerações lineares a_1 e a_2 dos blocos estão relacionadas à aceleração angular das polias pelas relações

$$a_1 = \alpha R_1 \quad \text{e} \quad a_2 = \alpha R_2,$$

com as quais podemos reescrever o sistema acima na forma

$$\begin{cases} T_1 = m_1 (g - \alpha R_1) \\ T_2 = m_2 (g - \alpha R_2) \\ m_1 R_1 (g - \alpha R_1) - m_2 R_2 (g - \alpha R_2) = I \alpha \end{cases},$$

e concluir que

$$\alpha = \frac{m_1 R_1 - m_2 R_2}{I + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2} g.$$

- (a) O valor de m_2 que torna nula a aceleração angular α é tal que

$$m_1 R_1 - m_2 R_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m_2 = \frac{R_1}{R_2} m_1.$$

Com $m_1 = 24$ kg, $R_1 = 1,2$ m e $R_2 = 0,4$ m, obtemos

$$m_2 = 72 \text{ kg}.$$

- (b) Se agora a massa do bloco 1 passa a $m_1 = 36$ kg, substituindo na expressão geral para α , tomando $g = 9,81$ m/s², calculamos

$$\alpha = 1,37 \text{ rad/s}^2,$$

e das expressões para T_1 e T_2 obtemos

$$T_1 = 294 \text{ N} \quad \text{e} \quad T_2 = 746 \text{ N}.$$

3. Vamos chamar de 1 a barra pela qual passa o eixo de rotação, de 2 a barra transversal e de 3 a barra paralela à primeira. Cada barra tem massa m .

- (a) Para calcular o momento de inércia I do conjunto em torno do eixo de rotação, usamos o fato de que

$$I = I_1 + I_2 + I_3,$$

sendo I_1 , I_2 e I_3 os momentos de inércia das barras 1, 2 e 3, respectivamente. Como as barras são finas, a distância de qualquer ponto da barra 1 ao eixo de rotação é desprezível, de modo que $I_1 = 0$. Já sabemos que

$$I_2 = \frac{1}{3} m L^2,$$

enquanto que todos os pontos da barra 3 estão aproximadamente à distância L do eixo de rotação, fazendo com que

$$I_3 = \int dm L^2 = m L^2.$$

Portanto, temos

$$I = \frac{4}{3} m L^2.$$

- (b) Inicialmente, o conjunto encontra-se em repouso numa posição horizontal. Ao cair sob ação da gravidade e atingir a posição vertical, terá atingido uma velocidade angular ω e seu centro de massa, que se localiza na metade da barra transversal, estará a uma altura $L/2$ abaixo da altura inicial. As variações de energia cinética e de energia potencial serão então dadas por

$$\Delta T = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad \text{e} \quad \Delta U = -(3m) \cdot g \cdot \frac{L}{2}.$$

Como a energia mecânica se conserva, devemos ter

$$\Delta E = \Delta T + \Delta U = 0 \quad \Rightarrow \quad I \omega^2 = 3mgL \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{L}}.$$