

FEP 0111 (noturno) - Quarta lista de exercícios

1. (a) Sabemos o período do satélite, e portanto sabemos sua velocidade angular, através da relação

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

A força centrípeta que mantém o satélite em órbita é a atração gravitacional da Terra, de modo que

$$m\omega^2 r = \frac{GMm}{r^2},$$

sendo r o raio da órbita (medido em relação ao centro da Terra), m a massa do satélite e M a massa da Terra. Resolvendo essa última equação para r e utilizando a relação entre ω e T chegamos a

$$r = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Se queremos a distância d a partir da superfície da Terra, cujo raio é R , então

$$d = r - R.$$

Substituindo os valores $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$, $M = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$, $R = 6,24 \times 10^6 \text{ m}$ e $T = 24 \text{ h} = 86400 \text{ s}$, obtemos

$$d = 4,22 \times 10^4 \text{ km} = 5,6 \cdot R.$$

- (b) Desprezando os efeitos da atmosfera, ou seja, sob ação exclusiva das forças gravitacionais, a energia mecânica é conservada. Lançando um satélite da superfície da Terra, podemos fazê-lo atingir a altura da órbita estacionária, embora não seja possível *mantê-lo* nessa órbita. Se queremos ainda que o satélite atinja a altura d com a mesma velocidade $v = \omega r$ correspondente à órbita estacionária, precisamos lançá-lo com velocidade v_0 tal que

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R} \\ \Rightarrow \quad v_0 &= \sqrt{v^2 - GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)}, \end{aligned}$$

e substituindo os dados do item anterior chegamos a

$$v_0 = 10,3 \text{ km/s}.$$

2. Desprezar o tempo que a bala leva para atravessar o pêndulo equivale a desprezar a elevação do pêndulo entre a entrada e a saída da bala. Nessas condições, a conservação do momento nos diz que, sendo m a massa da bala, v_0 sua velocidade inicial, v sua velocidade final, M a massa do pêndulo e V sua velocidade após a saída da bala,

$$mv_0 = mv + MV \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m}{M}(v_0 - v).$$

A conservação da energia mecânica durante a elevação do pêndulo até a altura máxima h fornece

$$\frac{1}{2}MV^2 = Mgh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{V^2}{2g} = \frac{m^2(v_0 - v)^2}{2M^2g}.$$

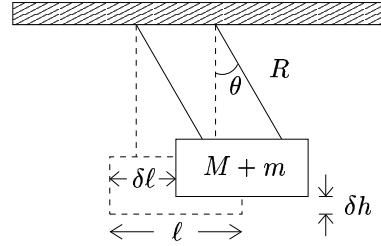
Com $m = 5$ g, $M = 2$ kg, $v_0 = 400$ m/s e $v = 100$ m/s, temos

$$h \simeq 2,9 \text{ cm}.$$

Para avaliar a validade da aproximação, vamos estimar a real variação de altura do pêndulo durante o tempo δt que a bala leva para atravessá-lo, utilizando em alguns momentos argumentos *a la Fermi*. O deslocamento horizontal do pêndulo durante esse tempo é $\delta \ell$, para o qual podemos estabelecer um limite superior lembrando que a velocidade horizontal média da bala é $\bar{v} > v$, enquanto a velocidade horizontal média do pêndulo é $\bar{V} < V$; assim,

$$\delta t = \frac{\ell}{\bar{v}} = \frac{\delta \ell}{\bar{V}} \quad \Rightarrow \quad \delta \ell = \frac{\bar{V}}{\bar{v}} \ell < \frac{V}{v} \ell.$$

Supondo que a variação de altura correspondente δh (veja a figura ao lado) seja pequena, podemos estimá-la lembrando que, para uma variação angular do pêndulo $\theta \ll 1$ rad, temos



$$\delta \ell = R \sin \theta \simeq R\theta \quad \text{e} \quad \delta h = R(1 - \cos \theta) \simeq \frac{1}{2}R\theta^2$$

$$\Rightarrow \delta h \simeq \frac{(\delta \ell)^2}{2R},$$

sendo R o comprimento do fio. Fazendo agora a hipótese de que R e ℓ sejam da mesma ordem de grandeza, $R \approx \ell$, estimamos a ordem de

grandeza de δh (desprezando o fator 2) como

$$\delta h \approx \left(\frac{V}{v}\right)^2 \ell = \frac{m^2}{M^2} \left(\frac{v_0}{v} - 1\right)^2 \ell \approx 10^{-2} \ell.$$

A aproximação será válida a menos que δh torne-se da ordem de $h \simeq 3$ cm, ou seja, a menos que o comprimento ℓ do pêndulo seja da ordem de 3 m. É difícil imaginar uma bala capaz de penetrar uma distância tão grande, a menos que o pêndulo seja feito de um material muito pouco denso!