

### FEP 0111 (diurno) - Nona lista de exercícios

1. A equação de movimento do oscilador é

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \sin(\omega t). \quad (1)$$

Como  $\sin(\omega t)$  corresponde à parte imaginária de  $e^{i\omega t}$ , vamos tentar resolver a equação diferencial introduzindo a variável complexa  $z(t)$  tal que

$$x(t) = \text{Im } z(t).$$

Temos assim

$$m\ddot{z} + kz = F_0 e^{i\omega t} \Rightarrow \ddot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}. \quad (2)$$

Uma solução particular da equação inhomogênea (2) é

$$z(t) = z_0 e^{i\omega t},$$

desde que

$$(-\omega^2 + \omega_0^2) z_0 = \frac{F_0}{m} \Rightarrow z_0 = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Somando a solução geral da equação homogênea, obtemos para  $x(t)$  a forma

$$x(t) = z_0 \sin(\omega t) + A_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0),$$

em que as constantes  $A_0$  e  $\phi_0$  são determinadas a partir das condições iniciais. Para  $x(0) = 0$  e  $v(0) = 0$  temos

$$\begin{cases} A_0 \cos \phi_0 = 0 \\ z_0 \omega - A_0 \omega_0 \sin \phi_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \phi_0 = 0 \\ A_0 = \frac{\omega}{\omega_0 \sin \phi_0} z_0 \end{cases}.$$

Fazendo a escolha  $\phi_0 = \pi/2$ , temos  $\sin \phi_0 = 1$ , e então podemos escrever

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \left[ \sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right].$$

2. A amplitude de oscilação estacionária de um oscilador de massa  $m$ , frequência livre  $\omega_0$  e constante de amortecimento  $\gamma$ , sujeito a uma força externa  $F_0 \cos(\omega t)$ , é

$$A = \frac{F_0/m}{\left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2 \right]^{1/2}}. \quad (3)$$

- (a) A amplitude de oscilação será máxima quando o denominador de (3) for mínimo, ou seja, quando

$$\frac{d}{d\omega} \left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2 \right] = 0 \Rightarrow 4\omega (\omega^2 - \omega_0^2) + 2\gamma^2 \omega = 0.$$

Essa última equação tem duas soluções, uma das quais é  $\omega = 0$ . No entanto, essa situação corresponderia à ausência de oscilações forçadas, e o sistema tenderia ao equilíbrio. Resta a outra solução, dada por

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{2}\gamma^2},$$

para a qual o valor de  $A$  é

$$A = \frac{F_0/m\gamma}{[\omega_0^2 - \frac{1}{4}\gamma^2]^{1/2}}$$

- (b) Maximizar a amplitude de velocidade  $\omega A$  é equivalente a maximizar a função

$$f(\omega) = \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}.$$

Temos então

$$f'(\omega) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(2\omega + 4\omega^3)(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]^2} = 0,$$

de onde obtemos

$$\omega = \omega_0 \quad \text{e} \quad \omega A = \frac{F_0}{m\gamma}.$$

3. As equações de movimento das partículas são

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 - K(x_1 - x_2) \\ m\ddot{x}_2 = -kx_2 + K(x_1 - x_2) \end{cases}.$$

Somando e subtraindo as equações acima, obtemos

$$\begin{cases} m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k(x_1 + x_2) \\ m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -k(x_1 - x_2) - 2K(x_1 - x_2) \end{cases}.$$

Introduzindo as coordenadas normais

$$q_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \quad \text{e} \quad q_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2),$$

temos, com  $\omega_1^2 = k/m$  e  $\omega^2 = K/m$ ,

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 = -\omega_0^2 q_1 \\ m\ddot{q}_2 = -(\omega_1^2 + 2\omega^2) q_2 \equiv -\omega_2^2 q_2 \end{cases},$$

cujas soluções gerais são

$$q_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad \text{e} \quad q_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Portanto, as soluções gerais para os deslocamentos são

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases},$$

com as constantes  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  determinadas a partir das condições iniciais. Impondo  $x_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $\dot{x}_1(0) = 0$  e  $\dot{x}_2(0) = v$ , obtemos o sistema de equações

$$\begin{cases} A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 = 0 \\ A_1 \cos \varphi_1 - A_2 \cos \varphi_2 = 0 \\ -A_1 \omega_1 \sin \varphi_1 - A_2 \omega_2 \sin \varphi_2 = 0 \\ -A_1 \omega_1 \sin \varphi_1 + A_2 \omega_2 \sin \varphi_2 = v \end{cases},$$

que tem como solução

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{2} \\ A_1 = \frac{1}{2} \frac{v}{\omega_1} \\ A_2 = -\frac{1}{2} \frac{v}{\omega_2} \end{cases},$$

de modo que a dependência temporal de  $x_1$  e  $x_2$  é descrita por

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2} \frac{v}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) - \frac{1}{2} \frac{v}{\omega_2} \sin(\omega_2 t) \\ x_2(t) = \frac{1}{2} \frac{v}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) + \frac{1}{2} \frac{v}{\omega_2} \sin(\omega_2 t) \end{cases}.$$