

**FEP 0111 (diurno) - Segunda lista de exercícios**

1. Desprezar o tempo que a bala leva para atravessar o pêndulo equivale a desprezar a elevação do pêndulo entre a entrada e a saída da bala. Nessas condições, a conservação do momento nos diz que, sendo  $m$  a massa da bala,  $v_0$  sua velocidade inicial,  $v$  sua velocidade final,  $M$  a massa do pêndulo e  $V$  sua velocidade após a saída da bala,

$$mv_0 = mv + MV \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m}{M}(v_0 - v).$$

A conservação da energia mecânica durante a elevação do pêndulo até a altura máxima  $h$  fornece

$$\frac{1}{2}MV^2 = Mgh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{V^2}{2g} = \frac{m^2(v_0 - v)^2}{2M^2g}.$$

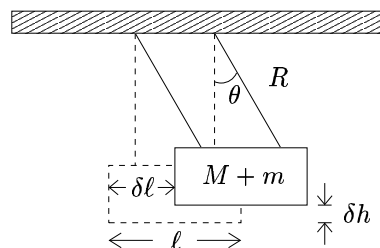
Com  $m = 5$  g,  $M = 2$  kg,  $v_0 = 400$  m/s e  $v = 100$  m/s, temos

$$h \simeq 2,9 \text{ cm}.$$

Para avaliar a validade da aproximação, vamos estimar a real variação de altura do pêndulo durante o tempo  $\delta t$  que a bala leva para atravessá-lo, utilizando em alguns momentos argumentos *a la Fermi*. O deslocamento horizontal do pêndulo durante esse tempo é  $\delta \ell$ , para o qual podemos estabelecer um limite superior lembrando que a velocidade horizontal média da bala é  $\bar{v} > v$ , enquanto a velocidade horizontal média do pêndulo é  $\bar{V} < V$ ; assim,

$$\delta t = \frac{\ell}{\bar{v}} = \frac{\delta \ell}{\bar{V}} \quad \Rightarrow \quad \delta \ell = \frac{\bar{V}}{\bar{v}} \ell < \frac{V}{v} \ell.$$

Supondo que a variação de altura correspondente  $\delta h$  (veja a figura ao lado) seja pequena, podemos estimá-la lembrando que, para uma variação angular do pêndulo  $\theta \ll 1$  rad, temos



$$\delta \ell = R \sin \theta \simeq R\theta \quad \text{e} \quad \delta h = R(1 - \cos \theta) \simeq \frac{1}{2}R\theta^2$$

$$\Rightarrow \delta h \simeq \frac{(\delta \ell)^2}{2R},$$

sendo  $R$  o comprimento do fio. Fazendo agora a hipótese de que  $R$  e  $\ell$  sejam da mesma ordem de grandeza,  $R \approx \ell$ , estimamos a ordem de grandeza de  $\delta h$  (desprezando o fator 2) como

$$\delta h \approx \left(\frac{V}{v}\right)^2 \ell = \frac{m^2}{M^2} \left(\frac{v_0}{v} - 1\right)^2 \ell \approx 10^{-2} \ell.$$

A aproximação será válida a menos que  $\delta h$  torne-se da ordem de  $h \simeq 3$  cm, ou seja, a menos que o comprimento  $\ell$  do pêndulo seja da ordem de 3 m. É difícil imaginar uma bala capaz de penetrar uma distância tão grande, a menos que o pêndulo seja feito de um material muito pouco denso!

2. A força centrípeta que mantém o satélite de massa  $m$  em órbita a uma distância  $R$  do centro da Lua, de massa  $M$ , é a própria força gravitacional entre eles, dada por

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{R^2} \hat{r} = -m\omega^2 R \hat{r},$$

em que  $\omega$  é a velocidade angular da órbita, relacionada ao período  $T$  por

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Temos daí que

$$M = \frac{\omega^2 R^3}{G} = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}. \quad (1)$$

Com  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ ,  $T = 1 \text{ h } 59 \text{ min} = 7140 \text{ s}$  e  $R = 1851 \text{ km}$ , chegamos a

$$M = 7,36 \times 10^{22} \text{ kg}.$$

3. (a) Da equação (1) do exercício anterior, temos

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{GM} = \frac{3\pi}{G} \left( \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{M} \right) = \frac{3\pi}{G\rho},$$

em que

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

é a densidade de uma esfera de massa  $M$  e raio  $R$ . Portanto, o período  $T$  de um satélite em órbita próximo à superfície de um planeta de raio  $R$  e massa  $M$  é

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}},$$

que depende apenas da densidade do planeta.

- (b) Para a Terra, com densidade  $\rho$  de 5,42 toneladas por metro cúbico, a fórmula final do item anterior dá como resultado

$$T \simeq 5106 \text{ s} \simeq 85 \text{ min}.$$

- (c) A velocidade do satélite em órbita da Terra, de raio  $R = 6,38 \times 10^6$  m, é

$$v = \frac{2\pi R}{T} \simeq 7850 \text{ m/s.}$$

4. A força gravitacional exercida sobre uma partícula a uma distância  $r$  do centro da Terra depende apenas da massa  $M(r)$  contida na esfera de raio  $r$ , de modo que

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -G \frac{m}{r^2} M(r) = -G \frac{m}{r^2} \cdot \frac{4}{3} \pi \rho r^3 \Rightarrow \frac{d^2 r}{dt^2} = - \left( \frac{4}{3} \pi G \rho \right) r.$$

Comparando essa última expressão com a aceleração de um oscilador harmônico (um corpo ligado a uma mola com deformação  $x$ ) de frequência angular  $\omega$ ,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x,$$

identificamos

$$\omega = \sqrt{\frac{4}{3} \pi G \rho}$$

vemos que o período do corpo em seu movimento através do túnel é

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}},$$

como no caso do satélite no item (a) do exercício anterior! Isso não é mera coincidência. Se calcularmos a componente  $a_z$  da aceleração centrípeta do satélite ao longo de um eixo (análogo ao túnel) que passa pelo centro da Terra e corta a órbita, veremos que, quando a componente da posição do satélite ao longo do eixo for  $r$ , teremos  $a_z = -m\omega^2 r$ , com o mesmo  $\omega$  da partícula no túnel. Daí concluímos que a componente  $r$  da posição do satélite sobre um eixo que passa pelo centro da Terra varia da mesma forma que a distância da partícula no túnel ao centro da Terra, e portanto o período do movimento é o mesmo nas duas situações.

$$\vec{a} = -m\omega^2 R \hat{r}$$

$$a_z = \vec{a} \cdot \hat{z} = -m\omega^2 R \cos \theta = -m\omega^2 r$$

