

### FEP 0111 (diurno) - Oitava lista de exercícios

1. A solução geral para o deslocamento no amortecimento crítico é

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} (a + bt),$$

gerando uma velocidade dada por

$$v(t) = -\frac{\gamma}{2}e^{-\frac{\gamma}{2}t} (a + bt) + be^{-\frac{\gamma}{2}t}.$$

Impondo as condições iniciais  $x(0) = 0$  e  $v(0) = v_0$ , temos

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = v_0 t e^{-\frac{\gamma}{2}t} \\ v(t) = v_0 \left(1 - \frac{\gamma}{2}t\right) e^{-\frac{\gamma}{2}t} \end{cases}.$$

O máximo deslocamento é obtido de  $v(t^*) = 0$ , ou seja,

$$1 - \frac{\gamma}{2}t^* = 0 \Rightarrow t^* = \frac{2}{\gamma}.$$

Chamando  $x(t^*)$  de  $x^*$ , temos

$$x^* = v_0 t^* e^{-\frac{\gamma}{2}t^*} = v_0 t^* e^{-1}.$$

Com  $x^* = 3,68 \text{ m}$ , obtemos então

$$v_0 = \frac{x^*}{t^*} \cdot e = 10 \text{ m/s}.$$

Se, de modo mais geral,  $x(0) = x_0$ , teríamos

$$\begin{cases} a = x_0 \\ -\frac{\gamma}{2}a + b = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = x_0 \\ b = v_0 + \frac{\gamma}{2}x_0 \end{cases},$$

de modo que a dependência temporal de do deslocamento seria

$$x(t) = \left[ x_0 + \left( v_0 + \frac{\gamma}{2}x_0 \right) t \right] e^{-\frac{\gamma}{2}t},$$

que, com  $x_0 = 2 \text{ m}$ ,  $v_0 = 10 \text{ m/s}$  e  $\gamma = 2 \text{ s}^{-1}$ , produz

$$x(t) = (2 + 12t) e^{-t}.$$

2. A equação de movimento da partícula é

$$m\ddot{z} = -\rho z \Rightarrow \ddot{z} = -\frac{\rho}{m}z \equiv -\beta z.$$

Vamos procurar soluções do tipo

$$z(t) = e^{pt},$$

com  $p$  constante. Temos

$$\dot{z}(t) = pe^{pt} \quad \text{e} \quad \ddot{z}(t) = p^2 e^{pt},$$

e substituindo na equação de movimento obtemos

$$p^2 = -\beta p \quad \Rightarrow \quad p = 0 \quad \text{ou} \quad p = -\beta,$$

de modo que a solução geral deve ser escrita como

$$z(t) = a + be^{-\beta t},$$

com  $a$  e  $b$  constantes determinadas pelas condições iniciais. A velocidade, na forma geral, é

$$\dot{z}(t) = -b\beta e^{-\beta t},$$

e impondo  $z(0) = z_0$  e  $\dot{z}(0) = v_0$  temos

$$\begin{cases} a + b = z_0 \\ -b\beta = v_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = z_0 + \frac{mv_0}{\rho} \\ b = -\frac{mv_0}{\rho} \end{cases},$$

e portanto

$$z(t) = z_0 + \frac{mv_0}{\rho} \left(1 - e^{-\rho t/m}\right).$$