

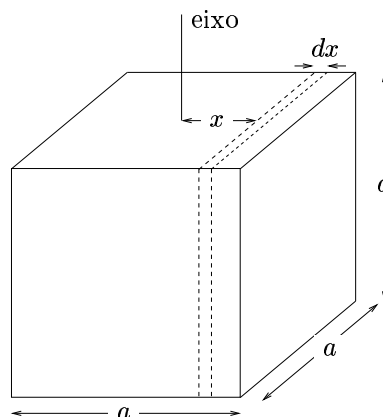
**FEP 0111 (diurno) - Quinta lista de exercícios**

- Podemos considerar o cubo como composto de um grande número de chapas muito finas, de espessura  $dx$  e momento de inércia  $dI$ , e integrar sobre essas chapas para calcular o momento de inércia total.

De acordo com a figura ao lado, e utilizando o teorema dos eixos paralelos, o momento de inércia de uma certa chapa, localizada a uma distância  $x$  do eixo, é

$$dI = dI_{\text{cm}} + dm \cdot x^2,$$

em que  $dI_{\text{cm}}$  é o momento de inércia da chapa em relação a um eixo paralelo a duas de suas arestas e que passa por seu centro de massa.



Mas sabemos que  $dI_{\text{cm}}$  é idêntico ao momento de inércia de uma barra delgada de comprimento  $a$  em relação a um eixo perpendicular que passa pelo centro de massa; ou seja,

$$dI_{\text{cm}} = \frac{1}{12} dm \cdot a^2.$$

Como a densidade do cubo é homogênea e dada por  $M/a^3$ , e o volume da chapa é  $a^2 dx$ , temos

$$dm = \frac{M}{a^3} \cdot a^2 dx = \frac{M}{a} dx,$$

e daí segue que

$$dI = \left( \frac{1}{12} a^2 + x^2 \right) dm = \frac{M}{a} \left( \frac{1}{12} a^2 + x^2 \right) dx,$$

e então

$$\begin{aligned} I &= \int dI = \frac{M}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \left( \frac{1}{12} a^2 + x^2 \right) dx \\ &= \frac{M}{a} \left( \frac{1}{12} a^2 \cdot a + \frac{2}{3} \cdot \frac{a^3}{8} \right) \\ \Rightarrow I &= \frac{1}{6} M a^2. \end{aligned}$$

2. O momento de inércia do alçapão, em relação a um eixo que passa por uma de suas arestas (onde estão as dobradiças), é idêntico ao momento de inércia de uma barra delgada de comprimento  $a$  e massa  $M$  com relação a um eixo que passa por uma de suas extremidades; portanto,

$$I = \frac{1}{3}Ma^2.$$

Vamos adotar como referencial de energia potencial gravitacional a altura do chão. Quando o alçapão está na posição vertical, a energia mecânica do sistema é

$$E = Mg \left( \frac{a}{2} \right),$$

já que  $a/2$  é a altura do centro de massa do alçapão. Na iminência de bater no chão, a energia mecânica do sistema tem contribuição apenas da energia cinética de rotação,

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2,$$

de modo que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}I\omega^2 &= \frac{1}{2}Mga \\ \Rightarrow \quad \omega &= \sqrt{\frac{Mga}{I}} = \sqrt{\frac{3g}{a}}. \end{aligned}$$

3. As forças que atuam sobre o estojo circular são o peso  $mg$ , cujo ponto de aplicação é o centro de massa, e a tração  $T$ , aplicada no ponto em que a fita encontra o estojo. Ao longo da queda, a fita se desenrola, fazendo o estojo girar aceleradamente, sob ação do torque fornecido pela tração, em torno de um eixo perpendicular à superfície circular, e que passa pelo centro de massa. Adotando como positivos o sentido de rotação anti-horário e o sentido do vetor  $\vec{g}$ , temos

$$mg - T = ma$$

e

$$rT = I\alpha \quad \Rightarrow \quad T = \frac{I\alpha}{r},$$

com a aceleração linear do centro de massa  $a$  e a aceleração angular  $\alpha$  relacionadas por

$$\alpha = \frac{a}{r}.$$

O momento de inércia do estojo circular em torno do eixo de rotação é

$$I = \frac{1}{2}mr^2.$$

- (a) Eliminando a tensão nas duas primeiras equações e usando as expressões para  $\alpha$  e  $I$ , temos

$$mg - \frac{1}{2}mr^2 \cdot \frac{a}{r^2} = ma \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2}{3}g.$$

- (b) Substituindo o resultado do item anterior na expressão da tração, temos

$$T = \frac{1}{2}ma = \frac{1}{3}mg.$$

- (c) Como a velocidade inicial do estojo é nula, temos, pela conservação da energia mecânica

$$\frac{1}{2}mv^2 = mas \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2as} = \sqrt{\frac{4}{3}gs}.$$