

FEP 0111 (diurno) - Sexta lista de exercícios

1. No referencial do carrinho, se x' é o deslocamento da mola em relação à posição inicial (relaxada), a equação de movimento, levando em conta a força inercial, é

$$ma' = -kx' + F_{\text{inercial}} = -kx' - mA,$$

sendo A a aceleração do carrinho com relação ao chão. Podemos reescrever essa equação na forma

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} = -\frac{k}{m} \left(x' + \frac{m}{k} A \right),$$

e efetuar a mudança de variáveis $x = x' + mA/k$ para escrever

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x \quad \Rightarrow \quad x(t) = X \cos(\omega t + \phi),$$

com X e ϕ constantes e

$$\omega^2 = \frac{k}{m}.$$

A dependência temporal de x' é então

$$x'(t) = X \cos(\omega t + \phi) - \frac{m}{k} A,$$

que leva a uma velocidade em relação ao carrinho

$$v'(t) = \frac{dx'}{dt} = -\omega X \sin(\omega t + \phi).$$

e podemos determinar X e ϕ a partir das condições iniciais $x'(0) = 0$ e $v'(0) = 0$:

$$\begin{cases} x'(0) = 0 \\ v'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X \cos \phi - \frac{m}{k} A = 0 \\ \omega X \sin \phi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin \phi = 0 \\ X = \frac{mA}{k \cos \phi} \end{cases}.$$

Do resultado acima, temos $\phi = n\pi$, com n inteiro. Escolhendo $\phi = 0$, temos $X = mA/k$, e então a forma geral para $x'(t)$ é

$$x'(t) = \frac{m}{k} A (\cos \omega t - 1),$$

que corresponde a um movimento harmônico simples em torno da posição $-mA/k$.

(a) A amplitude do movimento é

$$X = mA/k = 0,1 \text{ m}.$$

(b) O período do movimento é

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 1,26 \text{ s.}$$

(c) A compressão máxima da mola corresponde ao valor absoluto do mínimo de $x'(t)$ ou seja

$$|x'_{\min}| = 2\frac{m}{k}A = 0,2 \text{ m.}$$

2. A balança indica a força que o homem faz sobre ela, igual à reação normal sobre o homem. No referencial do elevador, o homem está parado, de modo que

$$N - mg + F_{\text{inercial}} = N - mg - mA = 0,$$

sendo A a aceleração do elevador. Portanto,

$$A = \frac{N}{m} - g,$$

e com $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, $N = 85 \text{ kgf} = 85 \times 9,81 \text{ N}$ e $m = 100 \text{ kg}$ temos

$$A = -1,47 \text{ m/s}^2,$$

o que significa que o elevador está freando.

3. Num certo ponto P , situado a uma latitude λ , a força centrípeta que atua sobre um corpo de massa m é

$$\vec{F}_{\text{cp}} = -m\omega^2\rho\hat{\rho} = -m\omega^2r\cos\lambda\hat{\rho},$$

sendo ω a velocidade angular de rotação da Terra, $\rho = r\cos\lambda$ a distância do ponto P ao eixo de rotação e $\hat{\rho}$ o vetor unitário na direção que une P a esse eixo. As componentes radial (em direção ao centro da Terra) e tangencial (ao longo do meridiano) de \vec{F}_{cp} são

$$\vec{F}_{\text{cp}}^{(r)} = -m\omega^2r\cos^2\lambda\hat{r} \quad \text{e} \quad \vec{F}_{\text{cp}}^{(\theta)} = m\omega^2r\cos\lambda\sin\lambda\hat{\theta}.$$

Num referencial que se move junto com a Terra, a força efetiva é

$$\begin{aligned} \vec{F}' &= m\vec{g} - \vec{F}_{\text{cp}} \\ &= -m(g - \omega^2r\cos^2\lambda)\hat{r} - m\omega^2r\cos\lambda\sin\lambda\hat{\theta}. \end{aligned}$$

O ângulo de desvio α de um fio de prumo no ponto P é o ângulo entre a direção radial e a direção da força efetiva, de modo que

$$\text{tg } \alpha = \frac{\vec{F}' \cdot \hat{\theta}}{\vec{F}' \cdot \hat{r}} = \frac{\omega^2r\cos\lambda\sin\lambda}{g - \omega^2r\cos^2\lambda}.$$

Para encontrar a latitude que corresponde ao maior ângulo de desvio, devemos maximizar α em relação a λ . Mas, como a função $\operatorname{tg} \alpha$ é crescente no intervalo de interesse $0 < \alpha < \pi/2$, maximizar α é equivalente a maximizar $\operatorname{tg} \alpha$. Queremos então encontrar a latitude λ que seja solução da equação

$$\begin{aligned} \frac{d \operatorname{tg} \alpha}{d \lambda} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{(\cos^2 \lambda - \operatorname{sen}^2 \lambda) (g - \omega^2 r \cos^2 \lambda) - 2 \omega^2 r \cos^2 \lambda \operatorname{sen}^2 \lambda}{(g - \omega^2 r \cos^2 \lambda)^2} &= 0 \end{aligned}$$

Lembrando que $\operatorname{sen}^2 \lambda = 1 - \cos^2 \lambda$ e efetuando os produtos e simplificações, a equação acima produz

$$(2g - \omega^2 r) \cos^2 \lambda = g \quad \Rightarrow \quad \cos^2 \lambda = \frac{g}{2g - \omega^2 r}.$$

Como, para a Terra, $\omega^2 r = 3,4 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$ e $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, temos

$$\lambda = \arccos \sqrt{\frac{g}{2g - \omega^2 r}} = 44,9^\circ \quad (\text{norte ou sul}),$$

que corresponde a

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\omega^2 r \cos \lambda \operatorname{sen} \lambda}{g - \omega^2 r \cos^2 \lambda} = 1,7 \times 10^{-3} \text{ rad} = 0,1^\circ.$$