

FEP111 - LISTA 6 - GABARITO

PARTE 1 (EM CLASSE)

1) a) $\nu = \frac{1}{T} \Rightarrow \cancel{T=4s} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \nu = 2\pi \times 4 \frac{\text{RAD}}{s} = 8\pi \frac{\text{RAD}}{s}$

A amplitude é 0,5 cm.

b) $x(0) = 0,5 \text{ cm} \quad \nu(0) = \dot{x}(0) = 0$

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$x(0) = \overset{0,5 \text{ cm}}{0} \Rightarrow A = 0,5 \text{ cm}$$

$$\nu(0) = 0 \Rightarrow B = 0. \text{ Assim:}$$

$$x(t) = A \cos \omega t = 0,5 \times \cos(8\pi t) \quad (x \text{ em cm, } t \text{ em s}).$$

$$\cancel{\nu(t)} \quad \nu(t) = \dot{x}(t) = -4\pi \sin(8\pi t) \quad (\nu \text{ em cm/s, } t \text{ em s.})$$

c) Do item anterior, $x_{\max} = A = 0,5 \text{ cm}$, e $\nu_{\max} = 4\pi \text{ cm/s}$.

d) $x(3) = 0,5 \times \cos(24\pi) = 0,5 \times \cos(0) = 0,5 \text{ cm}$

$$\nu(3) = -4\pi \sin(24\pi) = -4\pi \times 0 = 0 \frac{\text{cm}}{s}.$$

2) Por cons. de momento, ^{imediatamente} após o choque o sistema massa + mola tem velocidade v_f dada por:

$$mv = (M+m)v_f \Rightarrow v_f = \frac{m}{M+m}v.$$

Este corpo composto $M+m$ oscila harmonicamente, com freq. angular ω dada por:

$$(M+m)\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{M+m}x = 0, \text{ ou seja, } \boxed{\omega^2 = \frac{k}{M+m}}.$$

Anim:

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \text{ com } \omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}}$$

Mds:

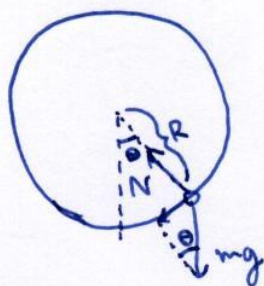
$$x(0) = 0 \Rightarrow A = 0, \quad \dot{x}(0) = v_f \Rightarrow \omega B = v_f \Rightarrow B = v_f / \omega.$$

Anim:

$$x(t) = \frac{m}{M+m} \frac{v}{\omega} \sin(\omega t), \text{ ou:}$$

$$x(t) = \frac{mv}{\sqrt{(M+m)k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{M+m}} t\right).$$

3)



A aceleração radial é tal que sempre garante que a partícula permaneça no arco, que é rígido. A única fonte de força tangencial é a gravidade. Pela figura ao lado, temos que:

$$F_{\theta} = \text{força tangencial} = -mg \sin \theta.$$

O sinal negativo vem do fato que F_{θ} acelera a partícula na direção oposta à orientação do ângulo θ (a força é conservativa).

Mas $F_{\theta} = ma_{\theta} = mR\ddot{\theta}$. Assim:

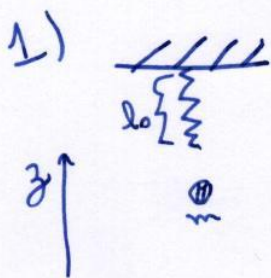
$$mR\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin \theta = 0$$

Supondo θ pequeno, $\sin \theta \cong \theta$, ~~temos~~ e teremos:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \theta = 0,$$

e que corresponde a uma oscilação harmônica com freq. angular $\omega = \sqrt{g/R}$, e período $T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$.

PARTE II - CASA



A nova posição de equilíbrio do sistema mola + massa é: $(\Delta x = l - l_0, l = \text{NOVA DIST. DE EQUILÍBRIO DA MOLA})$

$$K\Delta x = mg \Rightarrow \Delta x = \frac{mg}{K}$$

Assim $l = l_0 + \frac{mg}{K}$. Quando a massa é

soltada da posição l_0 , ela oscila com amplitude Δx , começando com vel. nula, e em uma posição acima da posição de equilíbrio do sistema massa + mola, $z_0 = \Delta x = \frac{mg}{K}$. Assim:

$z(t) = \frac{mg}{K} \cos(\omega t)$, onde $\omega = \sqrt{K/m}$, orientando z p/ cima, e tomando como origem o ponto de equilíbrio do sistema massa + mola.



O sistema massa + mola tem um pto de equilíbrio que fica a uma distância $\frac{mg}{K}$ abaixo do ponto onde a massa ganha no prato. Temos então:

$$E = \frac{1}{2} K x^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} K A^2. \text{ Na colisão, } x = \frac{mg}{K} \text{ e } v = \sqrt{2gh} : \text{ (pois o prato não tem massa)}$$

$$E = \frac{1}{2} K \frac{m^2 g^2}{K^2} + \frac{1}{2} m \cdot 2gh = \frac{m^2 g^2}{2K} + mgh = mg \left(h + \frac{mg}{2K} \right).$$

Esta é a energia total (item b).

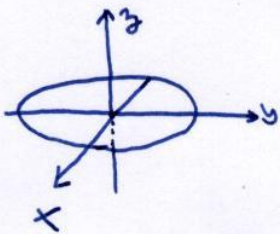
A amplitude é encontrada por: $E = \frac{1}{2} K A^2 = mg \left(h + \frac{mg}{2K} \right)$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{2mg}{K} \left(h + \frac{mg}{2K} \right)$$

3) a) $\tau = \text{torque} = I\ddot{\theta} = -K\theta \Rightarrow I\ddot{\theta} + K\theta = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{K}{I} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K}}$

$I = \frac{1}{2}MR^2 \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}MR^2}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{MR^2}{2K}}$

b) Usando o teorema dos eixos perpendiculares: (ex. 1, cap. 12, vol. I, Mayze).



$I_z = I_x + I_y$. Mas $I_x = I_y = I$, logo

$I_z = 2I \Rightarrow I = \frac{1}{2}I_z = \frac{1}{4}MR^2$

Anim, $T = 2\pi\sqrt{\frac{MR^2}{4K}} = \pi\sqrt{\frac{MR^2}{K}}$

4) Eq. p/ o movimento tangencial:



(i) $F_{\theta} = mR\ddot{\theta} = F_a - mg \sin \theta$ (F_a = força do atrito e rolamento).

Eq. p/ o rolamento: (escolhendo z saindo da falha):

$\tau = I\ddot{\phi} = F_a r$. Mesmo rol. sem desliz: $N = |\dot{\phi}|r$.

Pela orientação de z , temos que $v = -\dot{\phi}r$, e $a = R\ddot{\theta} = -\ddot{\phi}r$.

Anim: $-\frac{I}{r}R\ddot{\theta} = F_a r \Rightarrow F_a = -\frac{I}{r^2}R\ddot{\theta}$. Substituindo em (i):

$mR\ddot{\theta} = -\frac{I}{r^2}R\ddot{\theta} - mg \sin \theta$, ou:

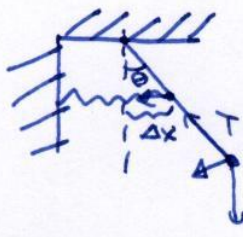
$(m + \frac{I}{r^2})R\ddot{\theta} + mg \sin \theta = 0$. Para θ pequeno, $\sin \theta \approx \theta$.

$\ddot{\theta} + \frac{mg}{(m + I/r^2)R} \theta = 0$. Anim, a mov. é harmônica, e

$\omega^2 = \frac{mg/R}{m + I/r^2}$. p/ a esfera, $\frac{I}{r^2} = \frac{2}{5}m$.

$\omega^2 = \frac{5}{7} \frac{g}{R}$

5)



A distensão da mola é $\Delta x = \frac{l}{2}\theta$, $r/\theta \ll 1$.

Encarando este sistema como um "pêndulo físico", a torque em rel. ao ponto de apoio é:

$$\tau = -mg l \theta - k \left(\frac{l}{2} \theta \right) \cdot \frac{l}{2} \Rightarrow \tau = -mg l \theta - \frac{l^2}{4} k \theta$$

Mas $\tau = I \ddot{\theta} = m l^2 \ddot{\theta}$. Assim:

$$m l^2 \ddot{\theta} + \left(mg l + \frac{k l^2}{4} \right) \theta = 0 \quad (r/\theta \ll 1),$$

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{k}{4m}$$