

FEP 0111 (noturno) - Décima segunda lista de exercícios

1. A componente tangencial da aceleração da conta é $a_\theta = r\ddot{\theta}$, enquanto a componente tangencial da força resultante sobre a conta é $F_\theta = -mg \sin \theta$, de modo que temos

$$ma_\theta = F_\theta \quad \Rightarrow \quad mr\ddot{\theta} = -mg \sin \theta.$$

Mas sabemos que, para pequenos ângulos ($\theta \ll 1$ rad), $\sin \theta \simeq \theta$, e podemos escrever

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{r}\theta,$$

equação que corresponde a um movimento harmônico simples de frequência angular ω tal que

$$\omega^2 = \frac{g}{r},$$

que conduz a um período de movimento

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

2. A energia de um oscilador harmônico simples é conservada, sendo igual a

$$E = \frac{1}{2}kA^2,$$

em que A é a amplitude de oscilação e k é a constante da mola. Por outro lado, num instante em que o oscilador, de massa m , tem velocidade v e encontra-se deslocado da posição de equilíbrio por uma distância x , temos

$$E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2.$$

Se $x = A/2$, então a energia potencial é

$$V = \frac{1}{2}k\left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}kA^2\right) = \frac{1}{4}E,$$

o que significa que a energia cinética é

$$T = E - V = \frac{3}{4}E.$$

Se queremos $T = V = E/2$, então

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}E = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}kA^2\right) \quad \Rightarrow \quad x = \pm \frac{A}{\sqrt{2}}.$$

3. (a) Supondo as molas conectadas do mesmo lado do bloco, a força que atua sobre o bloco deve poder ser escrita como

$$F = -kx,$$

sendo x o deslocamento em relação à posição de equilíbrio e k a constante de mola efetiva da associação, que precisamos calcular. Mas, como essa força se parece com uma tensão, deve ser a mesma a atuar nos terminais das molas. Temos portanto

$$F = -kx = -k_1x_1 = -k_2x_2,$$

sendo x_1 e x_2 os deslocamentos das molas de constantes k_1 e k_2 , respectivamente. Segue que

$$x_1 = \frac{k}{k_1}x \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{k}{k_2}x,$$

e lembrando que

$$x = x_1 + x_2$$

obtemos

$$x = \frac{k}{k_1}x + \frac{k}{k_2}x,$$

que deve ser válida para todo x . Daí

$$1 = \frac{k}{k_1} + \frac{k}{k_2} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}.$$

A frequência de oscilação é

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1k_2}{(k_1 + k_2)m}}.$$

- (b) Supondo agora as molas conectadas em lados opostos do bloco, a compressão sofrida por uma das molas deve ser igual à distensão sofrida pela outra, ou seja, a força que age sobre o bloco quando deslocado de uma posição x em relação ao equilíbrio é

$$F = -k_1x - k_2x = -(k_1 + k_2)x,$$

levando a uma constante de mola efetiva $k = k_1 + k_2$ e a uma frequência de oscilação dada por

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}.$$