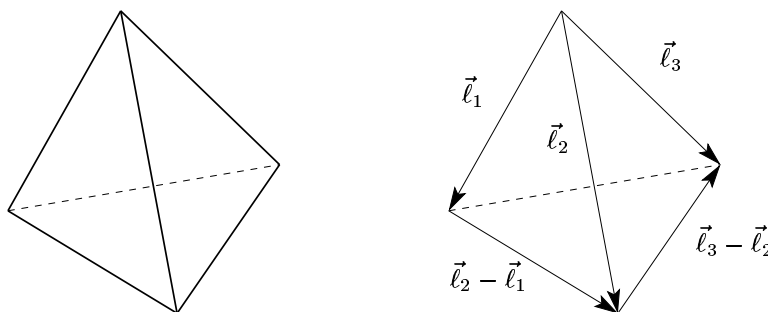


FEP 0111 (diurno) - Terceira lista de exercícios

1. (a) O módulo de $\vec{a} \times \vec{b}$ corresponde à área do paralelogramo definido pelos vetores \vec{a} e \vec{b} , e sua direção é tal que, visto de sua extremidade, o sentido de rotação de \vec{a} para \vec{b} é anti-horário, de forma análoga à definição de \vec{S} em relação à curva orientada C .
- (b) Como mostrado na figura, um tetraedro pode ser definido a partir de três vetores originais $\vec{\ell}_1$, $\vec{\ell}_2$ e $\vec{\ell}_3$ (não-coplanares), correspondentes a três das arestas; os vetores correspondentes às demais arestas são dados por diferenças dos vetores originais.



As áreas orientadas correspondentes às faces do tetraedro são

$$\begin{aligned}\vec{S}_i &= \frac{1}{2} \vec{\ell}_1 \times \vec{\ell}_2, \\ \vec{S}_{ii} &= \frac{1}{2} \vec{\ell}_2 \times \vec{\ell}_3, \\ \vec{S}_{iii} &= \frac{1}{2} \vec{\ell}_3 \times \vec{\ell}_1, \\ \vec{S}_{iv} &= \frac{1}{2} (\vec{\ell}_3 - \vec{\ell}_2) \times (\vec{\ell}_2 - \vec{\ell}_1),\end{aligned}$$

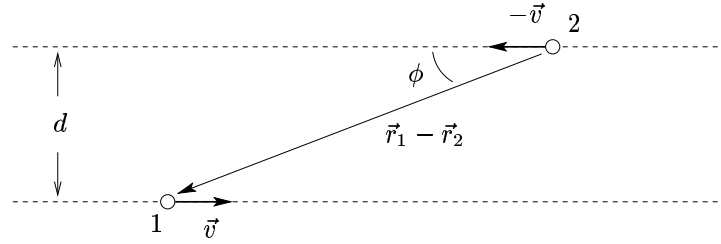
em que o fator $\frac{1}{2}$ vem do fato de que a área dos triângulos é igual a metade da área do paralelogramo definido pelos vetores correspondentes. Como o produto vetorial é distributivo, e lembrando que $\vec{\ell}_2 \times \vec{\ell}_2 = 0$, podemos ainda reescrever \vec{S}_{iv} na forma

$$\vec{S}_{iv} = \frac{1}{2} (\vec{\ell}_3 \times \vec{\ell}_2 - \vec{\ell}_3 \times \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 \times \vec{\ell}_1) = -\frac{1}{2} (\vec{\ell}_2 \times \vec{\ell}_3 + \vec{\ell}_3 \times \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_1 \times \vec{\ell}_2),$$

e segue então que

$$\vec{S}_i + \vec{S}_{ii} + \vec{S}_{iii} + \vec{S}_{iv} = 0.$$

2. (a) Na situação inicial do sistema, mostrada na figura a seguir, as duas partículas de massa m se aproximam ao longo de retas paralelas, separadas por uma distância d e com velocidades opostas e de mesmo módulo v .



O momento angular do sistema em relação a um certo ponto O é

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= \sum_{i=1,2} (\vec{r}_i - \vec{r}_O) \times \vec{p}_i = m (\vec{r}_1 - \vec{r}_O) \times \vec{v} + m (\vec{r}_2 - \vec{r}_O) \times (-\vec{v}) \\ &= m (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{v} - m (\vec{r}_O - \vec{r}_O) \times \vec{v} = m (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{v} \equiv \vec{L},\end{aligned}$$

ou seja, o momento angular do sistema depende apenas da posição relativa entre as partículas, mas não do ponto de referência! O módulo de \vec{L} é dado por

$$L = m |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| v \sin(\pi - \phi) = mvd,$$

já que $\sin(\pi - \phi) = \sin \phi$ e $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \sin \phi = d$. Como \vec{L} é perpendicular a $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ e a \vec{v} , o vetor momento angular é perpendicular ao plano do movimento. Quanto ao módulo de \vec{L} , com $m = 60 \text{ kg}$, $v = 5 \text{ m/s}$ e $d = 1,4 \text{ m}$, temos

$$L = 420 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

- (b) Depois que se dão as mãos, os patinadores passam a girar em torno de seu centro de massa comum. Como suas massas são iguais, o centro de massa deve se localizar a meia distância entre eles, ou seja, a $d/2$. Em termos do momento de inércia I e da velocidade angular de rotação ω , temos

$$L = I\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{mvd}{I}.$$

Mas o momento de inércia do sistema é

$$I = \sum_{i=1,2} m_i r_i^2 = m \left(\frac{d}{2}\right)^2 + m \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{md^2}{2},$$

de modo que

$$\omega = \frac{2v}{d} = 7,1 \text{ rad/s}.$$