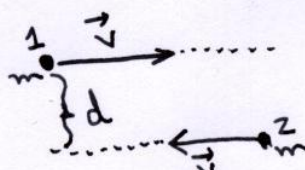


FEP 111 - LISTA 3

①

PARTE I (CLASSE)

1) a)  Em relação a uma origem qualquer, temos:

$$\vec{L} = m\vec{R}_1 \times \vec{v}_1 + m\vec{R}_2 \times \vec{v}_2,$$

onde $\vec{R}_1 = \vec{R}_1(t)$ e $\vec{R}_2 = \vec{R}_2(t)$ são as posições das duas partículas. Mas $\vec{v}_1 = -\vec{v}_2 \equiv \vec{v}$. Assim:

$$\vec{L} = m\vec{R}_1 \times \vec{v} - m\vec{R}_2 \times \vec{v} = m(\vec{R}_1 - \vec{R}_2) \times \vec{v}$$

Assim, \vec{L} não depende da posição relativa $\vec{R}_1 - \vec{R}_2$, que é um vetor independente da escolha de coordenadas: $\vec{R}_1' - \vec{R}_2' = \vec{R}_1 - \vec{R}_2$.

\vec{L} é, então, o mesmo para qualquer origem. Escolhendo por conveniência o origem na reta que contém a trajetória da partícula 1, teremos $\vec{R}_1 \times \vec{v} = 0$ neste caso, e $|\vec{R}_2 \times \vec{v}| = dV$, na direção \hat{k} . Assim,

$$\vec{L} = -m dV \hat{k}.$$

Substituindo os valores, encontramos $|\vec{L}| = 420 \text{ Kg m}^2/\text{s}$

b) Por conservação do momento angular total desse sistema, as duas partículas giram em torno de seu centro de massa com velocidade V . Assim:

$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{V}{d/2} = \frac{2V}{d}$$



Substituindo, $\omega = \frac{2 \cdot 5}{1,4} \approx 7,1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

2) a) Pela conservação de momento angular,

$$2mVR = 2mV'R' \Rightarrow VR = V'R'. \text{ Mas } V = \omega R:$$

$$\omega R^2 = \omega'(R')^2 \Rightarrow \boxed{\omega' = \left(\frac{R}{R'}\right)^2 \omega}$$

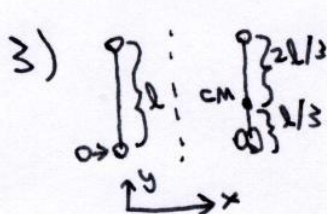
b) A quantidade de trabalho realizada é dada pela diferença entre as energias cinéticas inicial e final:

$$T_i = 2 \cdot \frac{1}{2} m V^2 = m \omega^2 R^2 \quad T_f = m (\omega')^2 (R')^2$$

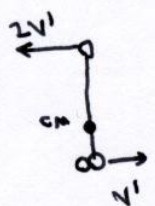
$$W = T_f - T_i = m [(\omega')^2 (R')^2 - \omega^2 R^2] = m \left[\left(\frac{R}{R'}\right)^4 \omega^2 (R')^2 - \omega^2 R^2 \right]$$

$$\Rightarrow W = m \omega^2 \left(\frac{R^4}{(R')^2} - R^2 \right) = \frac{m \omega^2}{(R')^2} (R^4 - R^2 (R')^2)$$

$$\boxed{W = m \omega^2 \left(\frac{R}{R'}\right)^2 (R^2 - (R')^2)} \quad \begin{array}{l} \text{Se } R' > R, W < 0 \\ \text{Se } R' < R, W > 0. \end{array}$$



Após a colisão, o centro de massa move-se com velocidade v_{cm} dada pela lei de conservação de momento.
 $mv = 3mv_{cm} \Rightarrow \boxed{v_{cm} = v/3}$, na direção x .



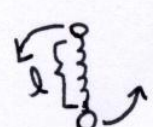
Depois da colisão, as duas bolas coladas giram em torno do centro de massa c/ velocidade v' (em relação a um referencial onde o CM está em repouso), e a bola de cima gira em rel. ao CM c/ vel. $2v'$, pois o CM fica a uma altura $l/3$ das duas bolas de baixo. O momento angular em rel. ao CM é:

$$L_{cm} = m \cdot (2v') \cdot \frac{2l}{3} + 2m \cdot v' \cdot \frac{l}{3} = 2mv'l.$$

Isto deve ser igual ao mom. angular em relação ao mesmo ponto antes da colisão: $L_{cm} = mv \frac{l}{3} = 2mv'l \Rightarrow v' = v/6.$

Isto corresponde a uma vel. angular ω em torno do CM de: $\omega = \frac{v'}{l/3} = \frac{v}{2l}$

LISTA 3 - CASA

1)  $L_i = 2m v \frac{l}{2} = m v l$. Mas, $v = \omega R$, com $R = \frac{l}{2}$
 $\Rightarrow L_i = \frac{m}{2} \omega l^2$.

Por cons. de mom. angular, $\frac{m}{2} \omega l^2 = \frac{m}{2} \omega' (l')^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\omega' = \left(\frac{l}{l'}\right)^2 \omega}$$

2) Como está no cap. 10.10 (massa reduzida) de Mayes, em relação ao CM temos:

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{M} \vec{r} \quad \vec{r}_2 = \frac{m_1}{M} \vec{r} \quad (M = m_1 + m_2), \quad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Anim:

$$\vec{L} = m_1 \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m_2 \vec{r}_2 \times \vec{v}_2 = -\frac{m_1 m_2}{M} \vec{r} \times \vec{v}_1 + \frac{m_1 m_2}{M} \vec{r} \times \vec{v}_2$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \mu \vec{r} \times (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \mu \vec{r} \times \vec{v} \quad (\mu = m_1 m_2 / M, \quad \vec{r} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1).$$

3) $\vec{F}_{res} = q\vec{E} + (-q)\vec{E} = 0$

Seja \vec{r}_+ e \vec{r}_- os vetores posição das partículas, temos:

$$\vec{\tau} = \vec{r}_+ \times (q\vec{E}) + \vec{r}_- \times (-q\vec{E}) = (\vec{r}_+ - \vec{r}_-) \times (q\vec{E})$$

Mas $\vec{r}_+ - \vec{r}_- = \vec{d}$, independentemente do sist. de referência. Anim:

$$\vec{\tau} = q \vec{d} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

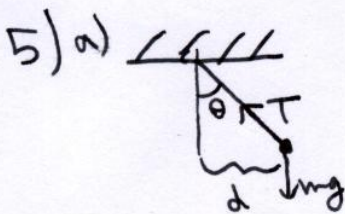
LISTA 3- CASA (CONT.)

4) As 4 massas estão girando em torno do centro de massa, que é o centro geométrico do quadrado. O CM move-se a uma velocidade dada por: $P = 4m \cdot v_{CM} \Rightarrow v_{CM} = P/4m$, na direção de \vec{P} . Em relação ao CM, o momento angular transmitido foi de: $L = Pl/\sqrt{2}$. Isto corresponde a uma rotação das 4 massas em torno do CM, com uma vel. angular:

$$4m\omega R^2 = L = Pl/\sqrt{2} \quad \text{Mas } R = l/\sqrt{2} :$$

$$4m\omega \frac{l^2}{2} = \frac{Pl}{\sqrt{2}} \Rightarrow 4m\omega l = \sqrt{2}P \Rightarrow$$

$$\boxed{\omega = \frac{\sqrt{2}P}{4ml}}$$



$$T \cos \theta = mg \quad \text{r/ } \theta = 30^\circ, \quad T = 2mg/\sqrt{3}$$

$$T \sin \theta = m \frac{v^2}{d} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{dT}{2m}} = \sqrt{\frac{dg}{\sqrt{3}}}$$

O mom. angular é, portanto, $L = mvd = 3^{-1/4} m \sqrt{g} d^{3/2}$

Por conservação do mom. angular (as forças exercidas no pra, quando ele é puxado, têm torque nulo em relação ao eixo), o mom. angular da situação final deve ser o mesmo.

$$\text{Para } \theta = 60^\circ, T \sin \theta = m \frac{v^2}{D} \Rightarrow v^2 = \sqrt{3} g D \Rightarrow v = 3^{1/4} \sqrt{g D}$$

$$L = mVD = 3^{1/4} m \sqrt{g} D^{3/2} \quad \text{Por cons. de momento angular:}$$

$$3^{1/4} m \sqrt{g} D^{3/2} = 3^{-1/4} m \sqrt{g} d^{3/2} \Rightarrow \underline{\underline{D = 3^{-1/3} d}}$$

O comprimento original do fio era $l_0 = d/\sin 30^\circ = 2d$.

O comprimento final é $l = D/\sin 60^\circ = 2 \cdot 3^{-5/6} d$

O comprimento de fio puxado é a diferença:

$$\Delta l = l_0 - l = 2(1 - 3^{-5/6})d \cong \underline{\underline{60 \text{ cm}}}$$

5) b) Cons. do mom. angular:

$$m \omega d^2 = m \omega D^2 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} = \left(\frac{d}{D}\right)^2 = \frac{1}{3^{2/3}} \Rightarrow \omega = 3^{2/3} \omega_0$$

Diferente do Mayes,
CHEQUEM!

6) O mom. angular inicial é: $L = 2m v_0 l_0$.

Como as partes da mola tem torque nulo em relação ao centro de massa, L se conserva. Quando a mola estiver novamente relaxada, a dist. das partículas ao C.M. será de $l_0/2$, e:

$$L = 2m v_0 \frac{l_0}{2} = 2m v_0 l_0 \Rightarrow \boxed{v_0 = 2v_0}$$

A vel. radial é encontrada por cons. de energia.

Inicialmente, a energia é:

$$E = 2 \times \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} k l_0^2 = m v_0^2 + \frac{1}{2} k l_0^2$$

A energia ~~final~~ ~~é~~ qda. a mola está relaxada é:

$$E = 2 \times \frac{1}{2} m (v_0^2 + v_A^2) = m v_0^2 + m v_A^2$$

Anim:

$$2m v_0^2 + 2m v_A^2 = k l_0^2 + 2m v_0^2 = 8m v_0^2 \quad (\text{quando } k l_0^2 = 6m v_0^2)$$

$$\text{Mas } 2m v_0^2 = 2m (2v_0)^2 = 8m v_0^2. \text{ Anim:}$$

$$8m v_0^2 + 2m v_A^2 = 8m v_0^2 \Rightarrow \boxed{v_A = 0}$$