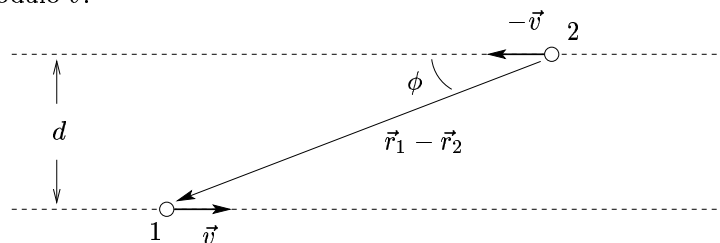


FEP 0111 (noturno) - Quinta lista de exercícios

1. (a) Na situação inicial do sistema, mostrada na figura a seguir, as duas partículas de massa m se aproximam ao longo de retas paralelas, separadas por uma distância d e com velocidades opostas e de mesmo módulo v .



O momento angular do sistema em relação a um certo ponto O é

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= \sum_{i=1,2} (\vec{r}_i - \vec{r}_O) \times \vec{p}_i = m (\vec{r}_1 - \vec{r}_O) \times \vec{v} + m (\vec{r}_2 - \vec{r}_O) \times (-\vec{v}) \\ &= m (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{v} - m (\vec{r}_O - \vec{r}_2) \times \vec{v} = m (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{v} \equiv \vec{L},\end{aligned}$$

ou seja, o momento angular do sistema depende apenas da posição relativa entre as partículas, mas não do ponto de referência! O módulo de \vec{L} é dado por

$$L = m |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| v \sin(\pi - \phi) = mvd,$$

já que $\sin(\pi - \phi) = \sin \phi$ e $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \sin \phi = d$. Como \vec{L} é perpendicular a $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ e a \vec{v} , o vetor momento angular é perpendicular ao plano do movimento. Quanto ao módulo de \vec{L} , com $m = 60 \text{ kg}$, $v = 5 \text{ m/s}$ e $d = 1,4 \text{ m}$, temos

$$L = 420 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

- (b) Depois que se dão as mãos, os patinadores passam a girar em torno de seu centro de massa comum. Como suas massas são iguais, o centro de massa deve se localizar a meia distância entre eles, ou seja, a $d/2$. Em termos do momento de inércia I e da velocidade angular de rotação ω , temos

$$L = I\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{mvd}{I}.$$

Mas o momento de inércia do sistema é

$$I = \sum_{i=1,2} m_i r_i^2 = m \left(\frac{d}{2}\right)^2 + m \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{md^2}{2},$$

de modo que

$$\omega = \frac{2v}{d} = 7,1 \text{ rad/s}.$$

2. (a) O torque exercido pela gravidade sobre o disco, em relação a um certo ponto O sobre a linha vertical sólida, é tal que

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times m\vec{g} \Rightarrow |\vec{\tau}| = mgr \sin \theta = mgb.$$

- (b) O momento angular do disco em relação a um ponto qualquer é seu momento angular intrínseco (ou seja, em relação a seu centro de massa), mais o momento angular de seu centro de massa com relação àquele ponto. Portanto,

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times m\vec{v} + I\vec{\omega}$$

$$\Rightarrow \ell = -mvr \sin \theta + I\omega = -m vb + I\omega,$$

já que, de acordo com a convenção (veja o problema 3), $\vec{\omega}$ aponta para fora do papel, enquanto $\vec{r} \times \vec{v}$ aponta para dentro. Assim, para que ℓ seja nulo, devemos ter

$$-m vb + I\omega = 0 \Rightarrow v = \frac{I\omega}{mb}.$$

3. (a) Desprezando a massa das hastes, o momento de inércia das duas bolinhas de massa M , com relação a O , é dado por

$$I_{2M} = M \cdot L^2 + M \cdot (2L)^2 = 5ML^2.$$

- (b) A energia cinética de rotação das duas bolinhas é

$$T_{2M} = \frac{1}{2} I_{2M} \omega^2 = \frac{5}{2} ML^2 \omega^2.$$

- (c) O módulo do vetor velocidade angular $\vec{\omega}$ é ω , sua direção é aquela do eixo de rotação, e convencionou-se que seu sentido seja tal que, olhando a partir da seta do vetor, a rotação ocorra em sentido anti-horário (no nosso caso, para fora do papel).
- (d) O teorema dos eixos paralelos nos diz que o momento de inércia de um corpo de massa m , em relação a um eixo localizado à distância ℓ de um eixo paralelo que cruza o centro de massa do corpo, é igual à soma de $m\ell^2$ com o momento de inércia em relação ao eixo que passa pelo centro de massa. Ou seja,

$$I_m = I_{CM} + m\ell^2.$$

No nosso caso, podemos utilizar o teorema para calcular o momento de inércia do conjunto formado pelas duas hastes de comprimento L em relação ao eixo vertical que passa pelo ponto O . O centro de massa do conjunto localiza-se sobre a bolinha mais próxima de O , ou seja, a uma distância L de O . Sabemos que o momento de inércia do

conjunto com relação a um eixo perpendicular a ele e que passa pelo centro de massa é

$$I_{\text{CM}} = \frac{1}{12} \cdot (2m) \cdot (2L)^2 = \frac{2}{3}mL^2,$$

e do teorema vem que

$$I_{2m} = \frac{2}{3}mL^2 + (2m) \cdot L^2 = \frac{8}{3}mL^2.$$

Portanto, o momento angular do sistema composto pelas bolinhas e hastes é

$$I = I_{2m} + I_{2M} = \left(\frac{8}{3}m + \frac{5}{2}M \right) L^2,$$

e sua energia cinética de rotação é

$$T = \frac{1}{2}I\omega^2 = \left(\frac{8}{3}m + \frac{5}{2}M \right) L^2\omega^2.$$

4. (a) O torque resultante é

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \\ &= 5\hat{i} \times (3\hat{i} - 4\hat{j} + 4\hat{k}) + (-5\hat{j}) \times (-2\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}) \\ &= -20(\hat{i} \times \hat{j}) + 20(\hat{i} \times \hat{k}) + 10(\hat{j} \times \hat{i}) + 20(\hat{j} \times \hat{k}) \\ &= -20\hat{k} - 20\hat{j} - 10\hat{k} + 20\hat{i} \\ \Rightarrow \quad \vec{\tau} &= 20\hat{i} - 20\hat{j} - 30\hat{k} \quad (\text{unidades SI}). \end{aligned}$$

- (b) O módulo do torque é

$$\tau = \sqrt{20^2 + 20^2 + 30^2} = 10\sqrt{17} \text{ N} \cdot \text{m}.$$

- (c) Para calcularmos os ângulos θ_x e θ_y entre o vetor torque e os eixos x e y , basta determinarmos as projeções de $\vec{\tau}$ nas direções dos versores \hat{i} e \hat{j} . Assim,

$$\begin{aligned} \vec{\tau} \cdot \hat{i} &= \tau \cos \theta_x \quad \Rightarrow \quad \cos \theta_x = \frac{(20\hat{i} - 20\hat{j} + 30\hat{k}) \cdot \hat{i}}{10\sqrt{17}} \\ \Rightarrow \quad \cos \theta_x &= \frac{2}{\sqrt{17}} \quad \Rightarrow \quad \theta_x = \arccos \frac{2\sqrt{17}}{17} \simeq 61^\circ, \end{aligned}$$

e de forma semelhante,

$$\begin{aligned} \vec{\tau} \cdot \hat{j} &= \tau \cos \theta_y \quad \Rightarrow \quad \cos \theta_y = \frac{(20\hat{i} - 20\hat{j} + 30\hat{k}) \cdot \hat{j}}{10\sqrt{17}} \\ \Rightarrow \quad \cos \theta_y &= -\frac{2}{\sqrt{17}} \quad \Rightarrow \quad \theta_y = \arccos -\frac{2\sqrt{17}}{17} \simeq 119^\circ. \end{aligned}$$