

FEP111 - LISTA 7 - GABARITO

PARTE I - CASA

1) A sol. p/ um pêndulo amortecido é $\theta(t) = A e^{-\gamma t/2} \cos(\omega t + \delta)$.

A quantidade $B(t) \equiv A e^{-\gamma t/2}$ é a "amplitude dependente do tempo", que decai de 2° p/ $1,5^\circ$, ou seja:

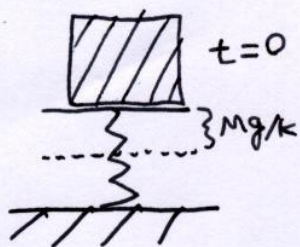
$$\text{Para } A_0 e^{-\gamma T/2} = A_T \quad A_0 = 2^\circ \quad A_T = 1,5^\circ, \quad T = 10 \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{20\pi}{\omega},$$

ou $T = 20s$

$$\Rightarrow e^{-\gamma T/2} = \frac{A_T}{A_0} = \frac{3}{4} \Rightarrow -\frac{\gamma T}{2} = \ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln 3 - \ln 4$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{2}{T} (\ln 4 - \ln 3) = \frac{2}{20} (\ln 4 - \ln 3) \approx 0.0288 \text{ s}^{-1}$$

2.)



Quando a massa M é posta na bandeja, forma-se um novo oscilador, com a nova massa $M+m$. Este oscilador tem uma posição de equilíbrio que é diferente da posição de equilíbrio sem a massa M . Esta nova posição de equilíbrio é dada por:

$$kX = (M+m)g \Rightarrow X = \frac{(M+m)g}{k}. \text{ A posição de eq. antiga era:}$$

$$kX_0 = mg \Rightarrow X_0 = mg/k. \text{ Assim, a nova posição de equilíbrio}$$

está $\Delta X = Mg/k$ abaixo da pos. de eq. antes da massa M ser colocada na bandeja. Assim, a cond. inicial é $x_0 = \frac{Mg}{k}$ (orientando o eixo x p/ cima, com origem na pos. de equilíbrio atual), e $v_0 = 0$. Sendo a constante de amortecimento γ , teremos:

$$x(t) = e^{-\gamma t/2} (A \cos \omega t + B \sin \omega t), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$$

$$\text{Mas } x(0) = x_0 = A = Mg/k, \text{ e}$$

$$v(0) = 0. \quad \cancel{v(t) = \dot{x}(t)}$$

$$\Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega} + \frac{\gamma x_0}{2\omega} \Rightarrow B = \frac{Mg\gamma}{2\omega k}. \text{ Assim:}$$

$$x(t) = e^{-\gamma t/2} \frac{Mg}{k} \left(\cos(\omega t) + \frac{\gamma}{2\omega} \sin(\omega t) \right)$$

3) Sem sacudir a mola, a pos. de equilíbrio é $x_0 = mg/k$.
Sacudindo a mola, a pos. de equilíbrio passa a depender do tempo:

$$x_0(t) = \frac{mg}{k} + a \sin(\omega t), \quad a = 5 \text{ cm} = \text{ampl.}$$

A eq. de movimento fica então:

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0) - mg = -kx + mg + k a \sin(\omega t) - mg$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + kx = k a \sin(\omega t) \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 a \sin(\omega t),$$

onde $\omega_0^2 = k/m$. ~~\times não se trata de movimento harmônico simples~~

A sol. geral desta equação é:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin(\omega t), \quad \text{c/ } \frac{F_0}{m} = \omega_0^2 a$$

As cond. iniciais são: $x_0 = x(0) = 0 \Rightarrow A = 0$; $v(0) = 0 \Rightarrow \omega_0 B + \frac{\omega F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = 0 \Rightarrow B = -\frac{\omega F_0}{\omega_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{fazendo a medir a origem a} \\ \text{partir da pos. de eq. original,} \end{array} \right.$ assim: $x_0(t) = a \sin(\omega t)$

a) Assim:

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \left[\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right]$$

$$\omega_0^2 = k/m = 80/0,5 = 160 \text{ s}^{-2}; \quad \omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 4\pi^2 \text{ s}^{-2} \approx 40 \text{ s}^{-2}$$

$$\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} a \approx 6,6 \text{ cm.}$$

b) A ~~força~~ ^{F_F} dedo de quem segura a mola é, pela 3ª lei de Newton, igual ~~ao~~ a menos a força na mola m (já que a mola não tem massa):

$$F_F = -F = k(x - x_0) + mg = k(x - a \sin \omega t) + mg$$

c/ a origem de x medida a partir da
posição de equilíbrio original.

PARTE II - CASA

1) $v_0 \cong 10 \frac{m}{s}$

2) a) $\delta = \gamma \tau / 2$ b) $\delta = \frac{\ln 2}{n}$

3) a) Amplitude $\cong 4,97 \text{ cm}$ b) $\omega \cong \omega_0 = 10\sqrt{2} \frac{\text{rad}}{s}$

c) Amplitude na ressonância $\cong 35 \text{ cm}$

d) $\Delta\omega = \gamma = 1 \text{ s}^{-1}$

4) $x(t) = \frac{F_0}{m(\beta^2 + \omega_0^2)} \left[\frac{\beta}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) - \cos(\omega_0 t) + e^{-\beta t} \right]$