

# FEP111 - LISTA 7 - GABARITO

## PARTE I - CASA

1) A sol. p/ um pêndulo amortecido é  $\theta(t) = A e^{-\gamma t/2} \cos(\omega t + \delta)$ .

A quantidade  $B(t) \equiv A e^{-\gamma t/2}$  é a "amplitude dependente do tempo", que decai de  $2^\circ$  p/  $1,5^\circ$ , ou seja:

$$\text{Para } A_0 e^{-\gamma T/2} = A_T \quad A_0 = 2^\circ \quad A_T = 1,5^\circ, \quad T = 10 \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{20\pi}{\omega},$$

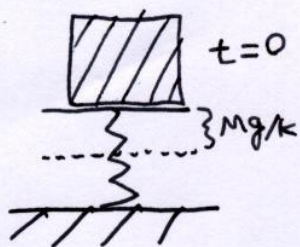
ou  $T = 20s$

$$\Rightarrow e^{-\gamma T/2} = \frac{A_T}{A_0} = \frac{3}{4} \Rightarrow -\frac{\gamma T}{2} = \ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln 3 - \ln 4$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{2}{T} (\ln 4 - \ln 3) = \frac{2}{20} (\ln 4 - \ln 3) \approx 0.0288 \text{ s}^{-1}$$



2.)



Quando a massa  $M$  é posta na bandeja, forma-se um novo oscilador, com a nova massa  $M+m$ . Este oscilador tem uma posição de equilíbrio que é diferente da posição de equilíbrio sem a massa  $M$ . Esta nova posição de equilíbrio é dada por:

$$kX = (M+m)g \Rightarrow X = \frac{(M+m)g}{k}$$

A posição de eq. antiga era:

$kX_0 = mg \Rightarrow X_0 = mg/k$ . Assim, a nova posição de equilíbrio está  $\Delta X = Mg/k$  abaixo da pos. de eq. antes da massa  $M$  ser colocada na bandeja. Assim, a cond. inicial é  $x_0 = \frac{Mg}{k}$  (orientando o eixo  $x$  p/ cima, com origem na pos. de equilíbrio atual), e  $v_0 = 0$ . Sendo a constante de amortecimento  $\gamma$ , teremos:

$$x(t) = e^{-\gamma t/2} (A \cos \omega t + B \sin \omega t), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$$

mas  $x(0) = x_0 = A = Mg/k$ , e

$v(0) = 0$ .  ~~$v(t) = \dot{x}(t)$~~

$$\Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega} + \frac{\gamma x_0}{2\omega} \Rightarrow B = \frac{Mg\gamma}{2\omega k}, \quad \text{Assim:}$$

$$x(t) = e^{-\gamma t/2} \frac{Mg}{k} \left( \cos(\omega t) + \frac{\gamma}{2\omega} \sin(\omega t) \right)$$



3) Sem sacudir a mola, a pos. de equilíbrio é  $x_0 = mg/k$ .  
Sacudindo a mola, a pos. de equilíbrio passa a depender do tempo:

$$x_0(t) = \frac{mg}{k} + a \sin(\omega t), \quad a = 5 \text{ cm} = \text{ampl.}$$

A eq. de movimento fica então:

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0) - mg = -kx + mg + k a \sin(\omega t) - mg$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + kx = k a \sin(\omega t) \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 a \sin(\omega t),$$

onde  $\omega_0^2 = k/m$ . ~~esta equação é a mesma da equação de movimento de um sistema massa-mola com uma força externa senoidal~~

A sol. geral desta equação é:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin(\omega t), \quad \text{c/ } \frac{F_0}{m} = \omega_0^2 a$$

As cond. iniciais são:  $x_0 = x(0) = 0 \Rightarrow A = 0$ ;   
  $v(0) = 0 \Rightarrow \omega_0 B + \frac{\omega F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = 0 \Rightarrow B = -\frac{\omega}{\omega_0} \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$    
 aním:  $x_0(t) = a \sin(\omega t)$

a) Aním:

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \left[ \sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right]$$

$$\omega_0^2 = k/m = 80/0,5 = 160 \text{ s}^{-2}; \quad \omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 4\pi^2 \text{ s}^{-2} \approx 40 \text{ s}^{-2}$$

$$\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} a \approx 6,6 \text{ cm}$$

b) A ~~força~~  <sup>$F_F$</sup>  dedo de quem segura a mola é, pela 3ª lei de Newton, igual ~~à~~ a menos a força na mola  $m$  (já que a mola não tem massa):

$$F_F = -F = k(x - x_0) + mg = k(x - a \sin \omega t) + mg$$

c/ a origem de  $x$  medida a partir da posição de equilíbrio original.



# PARTE II - CASA

1)  $t_0 = 1s$ ,  $x_{max} = 3,68 m$

$\gamma = 2W.$  ← críticamente amortecido

$$x(t) = A e^{-\gamma t/2} \cos + B t e^{-\gamma t/2}$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$x(t) = B t e^{-\gamma t/2}$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = B e^{-\gamma t/2} - \frac{B \gamma}{2} t e^{-\gamma t/2}$$

$$x_{max} \Rightarrow v = 0. \text{ Anini:}$$

$$\cancel{v(t=1s)} \quad v(t=1s) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B e^{-\gamma/2} - \frac{B \gamma}{2} e^{-\gamma/2} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = 2 s^{-1}}$$

$$\text{p/ } t=1s, x = x_{max}:$$

$$x(t=1s) = B e^{-1} = x_{max} \Rightarrow B = 3,68 \times e = 10,003 \frac{m}{s}$$

$$\text{Mas } v(0) = \dot{x}(0) = B. \text{ Anini, } v_0 \leq 10 \frac{m}{s}$$



$$2) x(t) = e^{-\gamma t/2} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$$

$$\text{ou } x(t) = e^{-\gamma t/2} A \cos(\omega t + \delta)$$

Os máximos ocorrem a intervalos de tempo de  $\tau = 2\pi/\omega$ .

Anim, em 2 máximas consecutivas, a 2ª tem uma "altura" (em x) diminuída em relação ao 1º de  $e^{-\gamma\tau/2} = R$ . Logo:

$$a) |\ln R| = \delta = |-\gamma\tau/2| = \gamma\tau/2$$

b) Em n oscilações, a amplitude é metade da original, ou seja:  $e^{-\gamma T/2} = \frac{1}{2}$ , onde  $T = n\tau$ . Anim:

$$e^{-\gamma n\tau/2} = \frac{1}{2} \Rightarrow -\gamma n\tau/2 = -\ln 2 \Rightarrow \frac{\gamma\tau}{2} = \boxed{\frac{\ln 2}{n} = \delta}$$

$$3) m = 2 \text{ kg} \quad K = 400 \text{ N/m} \quad \rho = 2 \text{ kg/s} \quad F_0 = 10 \text{ N} \quad \omega = 10 \frac{\text{RAD}}{\text{s}}$$

$$a) A = \frac{F_0/m}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2]^{1/2}} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = 10\sqrt{2} \frac{\text{RAD}}{\text{s}} \quad \gamma = \frac{\rho}{m} = 1 \text{ s}^{-1}$$

$$\text{Substituindo, } A = 4,97 \text{ cm}$$

b) Como  $\gamma \ll 2\omega_0$ , a ressonância ocorrerá praticamente em  $\omega = \omega_0$ .

$$c) A_{\text{res}} = \frac{F_0}{m\gamma\omega_0} = A(\omega = \omega_0) = 35 \text{ cm}$$

$$d) \Delta\omega \approx \gamma = 1 \text{ s}^{-1}$$



4)  $m\ddot{x} + Kx = F(t)$ , ou

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{-\beta t}$$

Tentamos uma solução da forma  $x(t) = C e^{-\beta t}$ :

$$C\beta^2 e^{-\beta t} + \omega_0^2 C e^{-\beta t} = \frac{F_0}{m} e^{-\beta t}$$

$$\Rightarrow C(\beta^2 + \omega_0^2) = F_0/m \Rightarrow \boxed{C = \frac{F_0}{m(\beta^2 + \omega_0^2)}}$$

A solução particular é então  $x_p(t) = \frac{F_0 e^{-\beta t}}{m(\beta^2 + \omega_0^2)}$ .

A solução geral é:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \frac{F_0 e^{-\beta t}}{m(\beta^2 + \omega_0^2)}$$

As cond. iniciais são  $x(0) = v(0) = 0$ .

$$x(0) = A + \frac{F_0}{m(\beta^2 + \omega_0^2)} = 0 \Rightarrow A = -\frac{F_0}{m(\beta^2 + \omega_0^2)}$$

$$\cancel{x(0)} \Rightarrow v(0) = \dot{x}(0) = \omega_0 B - \frac{\beta F_0}{m(\beta^2 + \omega_0^2)} = 0 \Rightarrow B = \frac{\beta}{\omega_0} \frac{F_0}{m(\beta^2 + \omega_0^2)}$$

Assim:

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\beta^2 + \omega_0^2)} \left[ \frac{\beta}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) - \cos(\omega_0 t) + e^{-\beta t} \right]$$