

### FEP 0111 (diurno) - Primeira lista de exercícios

1. Vamos medir os movimentos do gafanhoto (massa  $m_g$ ) e da folha (massa  $m_f$ ) num referencial em repouso com relação à água. O momento antes do salto é nulo. Supondo que não haja movimento vertical da folha, e que perturbações na água sejam desprezíveis, a conservação do momento na direção horizontal implica que

$$m_g v_g \cos \theta + m_f v_f = 0,$$

sendo  $v_g$  e  $v_f$  as velocidades do gafanhoto e da folha logo após o salto, que se dá segundo um ângulo  $\theta$ . O tempo que o gafanhoto leva para retornar ao solo é  $t$ , igual ao dobro do tempo correspondente à altura máxima; ou seja,

$$0 = v_g \sin \theta - g \frac{t}{2} \Rightarrow t = \frac{2}{g} v_g \sin \theta,$$

de modo que seu deslocamento é

$$\Delta x_g = v_g \cos \theta \cdot t = \frac{v_g^2}{g} \sin (2\theta).$$

Durante esse mesmo tempo, o deslocamento da beirada oposta da folha é

$$\Delta x_f = v_f \cdot t = -\frac{m_g}{m_f} v_g \cos \theta \cdot \frac{2}{g} v_g \sin \theta = -\frac{m_g}{m_f} \Delta x_g.$$

Escolhendo como origem do referencial a posição do gafanhoto no momento do salto, a condição para que o gafanhoto torne a cair sobre a folha, de comprimento  $\ell$ , é

$$\Delta x_g \leq \ell + \Delta x_f.$$

Portanto,

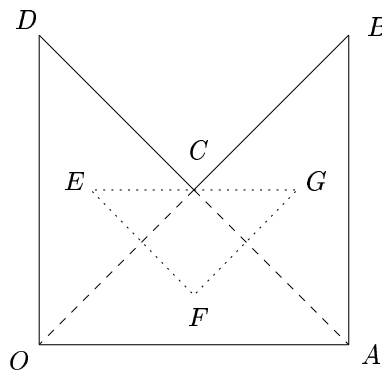
$$\begin{aligned} \Delta x_g \leq \ell - \frac{m_g}{m_f} \Delta x_g &\Rightarrow \Delta x_g \leq \frac{\ell}{1 + \frac{m_g}{m_f}} \\ \Rightarrow \sin (2\theta) &\leq \frac{g}{v_g^2} \cdot \frac{\ell}{1 + \frac{m_g}{m_f}}. \end{aligned}$$

Temos então uma desigualdade envolvendo a função  $\sin (2\theta)$  e uma constante, que podemos chamar de  $c$ . Fazendo um gráfico de  $\sin (2\theta)$  entre  $\theta = 0$  e  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , vemos que, para  $c < 1$ , há duas regiões que satisfazem a desigualdade, correspondendo, por simetria, a  $0 \leq \theta \leq \theta_1$  e  $\frac{\pi}{2} - \theta_1 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , sendo  $\theta_1$  o menor ângulo em que  $\sin (2\theta)$  cruza a reta horizontal de ordenada  $c$ . Utilizando  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ,  $v_g = 4 \text{ m/s}$ ,  $\ell = 0,3 \text{ m}$  e  $m_g/m_f = 1/4$ , temos

$$\begin{aligned} \sin (2\theta) &\leq 0,147 \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 4,23^\circ \\ 85,7^\circ \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \end{aligned}$$

2. Escolhendo como origem o vértice inferior esquerdo da placa, ou seja, o ponto  $O$  da figura, as coordenadas dos vértices, em unidades do lado do quadrado  $OABD$ , são

$$\begin{aligned}(x_O, y_O) &= (0, 0) \\ (x_A, y_A) &= (1, 0) \\ (x_B, y_B) &= (1, 1) \\ (x_C, y_C) &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ (x_D, y_D) &= (0, 1)\end{aligned}$$



- (a) Para calcular a posição do centro de massa da placa, vamos determinar primeiro as posições dos centros de massa dos triângulos  $OCD$ ,  $OAC$  e  $ABC$ .

- Centro de massa do triângulo  $OCD$  (ponto  $E$ ):

$$x_E = \frac{1}{3}x_C = \frac{1}{6}, \quad y_E = \frac{1}{2} \quad (\text{por simetria}).$$

- Centro de massa do triângulo  $OAC$  (ponto  $F$ ):

$$x_F = \frac{1}{2} \quad (\text{por simetria}), \quad y_F = \frac{1}{3}y_C = \frac{1}{6}.$$

- Centro de massa do triângulo  $ABC$  (ponto  $G$ ):

$$x_G = x_A - \frac{1}{3}(x_A - x_C) = \frac{5}{6}, \quad y_G = \frac{1}{2} \quad (\text{por simetria}).$$

O centro de massa da placa  $OABCD$  é então equivalente ao centro de massa das três “partículas”  $E$ ,  $F$  e  $G$ :

$$\begin{aligned}x_{CM} &= \frac{1}{2} \quad (\text{por simetria}), \\ y_{CM} &= y_C - \frac{1}{3}(y_C - y_F) = \frac{7}{18}.\end{aligned}$$

- (b) O centro de massa do triângulo  $BCD$ , correspondente ao que falta para transformar a placa no quadrado  $OABD$ , é o ponto  $H$  de coordenadas

$$x_H = \frac{1}{2} \quad (\text{por simetria}), \quad y_H = y_B - \frac{1}{3}(y_B - y_C) = \frac{5}{6};$$

o centro de massa do quadrado é obviamente o ponto  $C$ . A razão entre as massas do triângulo e do quadrado, representados respectivamente por “partículas” nos pontos  $H$  e  $C$ , é  $m_H/m_C = 1/4$ , já esta é a razão entre as áreas. Portanto, considerando negativa a massa do triângulo, temos

$$\begin{aligned}x_{CM} &= \frac{m_C x_C - m_H x_H}{m_C - m_H} = \frac{1}{2}, \\y_{CM} &= \frac{m_C y_C - m_H y_H}{m_C - m_H} = \frac{7}{18}.\end{aligned}$$

3. (a) É importante lembrar que, em média, a variação da massa do avião vem apenas do consumo de combustível, que vamos desprezar. Para a combustão do ar, é necessário inicialmente absorvê-lo a uma taxa  $\frac{dm}{dt}$ , gerando um empuxo negativo  $\frac{dm}{dt}v$ , sendo  $v$  a velocidade relativa entre o ar e o avião (ou seja, a velocidade do avião com respeito ao solo); em seguida, após a combustão, o ar é ejetado à mesma taxa  $\frac{dm}{dt}$ , gerando um empuxo positivo  $\frac{dm}{dt}v_{\text{rel}}$ , sendo  $v_{\text{rel}}$  a velocidade de ejeção do ar com relação ao avião. O empuxo total é assim

$$F = \frac{dm}{dt}(v_{\text{rel}} - v) = 6,83 \times 10^4 \text{ N},$$

com  $\frac{dm}{dt} = 150 \times 1,3 \text{ kg/s}$ ,  $v_{\text{rel}} = 600 \text{ m/s}$  e  $v = 900 \text{ km/h} = 250 \text{ m/s}$ .

- (b) A potência útil dos jatos é a força exercida por eles sobre o avião, multiplicada pela velocidade que imprimem. Portanto,

$$W = F \cdot v = \frac{dm}{dt}(v_{\text{rel}} - v) \cdot v = 1,7 \times 10^7 \text{ W}.$$

4. Vamos chamar a partícula de massa  $m$  de partícula 0, e as partículas de massa  $m'$  de partículas 1 e 2, de acordo com a distância à partícula 0. Sempre existem pelo menos duas colisões, já que, após a primeira delas, a partícula 1 move-se em direção à partícula 2. Se a partícula 0 inicialmente se desloca em direção à partícula 1 com velocidade  $v$ , a conservação do momento e da energia cinética para a primeira colisão fornece

$$mv = mv_0 + m'v_1 \quad (1)$$

e

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}m'v_1^2, \quad (2)$$

sendo  $v_0$  e  $v_1$ , respectivamente, as velocidades das partículas 0 e 1 após a colisão. Elevando a Eq. (1) ao quadrado, multiplicando a Eq. (2) por  $2m$  e subtraindo os resultados, chegamos a

$$(m'v_1)^2 + 2mm'v_0v_1 - mm'v_1^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{m'}{m} \right) v_1, \quad (3)$$

de onde, substituindo a expressão para  $v_0$  na Eq. (1) e dividindo por  $m$ , obtemos

$$v = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{m'}{m} \right) v_1 + \frac{m'}{m} v_1.$$

Resolvendo a equação acima para  $v_1$ , e em seguida substituindo o resultado na Eq. (3), expressamos  $v_0$  e  $v_1$  em termos de  $v$ :

$$v_0 = \frac{m - m'}{m + m'} v \quad \text{e} \quad v_1 = \frac{2m}{m + m'} v. \quad (4)$$

Após a segunda colisão, as partículas 1 e 2 simplesmente trocam suas velocidades, já que possuem massas iguais; desse modo, a partícula 1 atinge o repouso, enquanto a partícula 2 passa a se deslocar com velocidade  $v_1$ .

- (a) Para que haja apenas duas colisões, é necessário que  $v_0$ , a velocidade da partícula 0 após a primeira colisão, seja nula ou tenha sentido oposto a  $v_1$ . Vemos então da Eq. (3) que

$$\frac{v_0}{v_1} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{m'}{m} \leq 0 \quad m \leq m'.$$

- (b) Se  $v_0$  tem o mesmo sentido de  $v_1$ , haverá uma terceira colisão, envolvendo as partículas 0 e 1, já que esta permanece parada após a segunda colisão. A situação para essa terceira colisão é análoga à da primeira, mas com  $v_0$  fazendo o papel de  $v$ . Denotando por  $v'_0$  e  $v'_1$  as velocidades finais das partículas 0 e 1, podemos utilizar diretamente os resultados da Eq. (4) para escrever

$$v'_0 = \frac{m - m'}{m + m'} v_0 = \left( \frac{m - m'}{m + m'} \right)^2 v$$

e

$$v'_1 = \frac{2m}{m + m'} v_0 = \frac{2m(m - m')}{(m + m')^2} v.$$

A velocidade final da partícula 2 é  $v_1$ , adquirida após a segunda colisão.

- (c) Caso haja apenas duas colisões, vimos que a partícula 1 atinge o repouso, e seu momento e energia cinética são transferidos para a partícula 2; como a partícula 0 não se envolve na segunda colisão, de modo que seu estado não se altera, na situação final tudo se processa como se a partícula 1 não existisse.

5. Como o choque é inelástico (os carros passam a se movimentar juntos após a colisão), não ocorre conservação da energia cinética. No entanto, imediatamente em torno da colisão, vale a conservação do momento. Denotando por  $M$  e  $v$  a massa do carro de luxo e sua velocidade antes da

colisão, por  $m$  a massa do outro carro, e por  $v'$  a velocidade do conjunto instantaneamente após a colisão, temos

$$Mv = (M + m)v' \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{M}{M + m}v.$$

Sob ação da força de atrito, que produz uma aceleração  $-\mu g$ , os carros ainda percorrem distância  $\ell$  até pararem, de modo que

$$0 = v'^2 - 2\mu g\ell \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{M}{M + m}v\right)^2 = 2\mu g\ell$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{M + m}{m}\sqrt{2\mu g\ell}.$$

Adotando  $M/m = 2$ ,  $\mu = 0,6$ ,  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  e  $\ell = 10,5 \text{ m}$ , temos

$$v = 16,7 \text{ m/s} \simeq 60 \text{ km/h}.$$