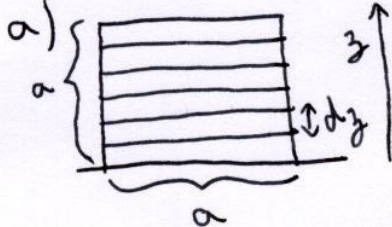


LISTA 4 - GABARITO

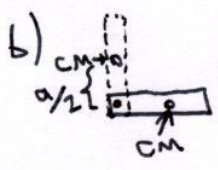
PARTE 1 - CLASSE

- 1) a)  O momento de inércia $dI(z)$ de uma pequena "fatia" do alçaço, com largura dz , é $dI(z) = z^2 dm(z)$, onde $dm(z)$ é a quantidade de massa contida na fatia:

$dm(z) = D \, a \, dz$, onde D = densidade superficial de massa, e $a \, dz$ = área da fatia. Mas $D = M / (\text{ÁREA TOTAL}) = M / a^2$. Assim:

$$dm(z) = \frac{M}{a} dz, \text{ e } dI(z) = \frac{M}{a} z^2 dz. \text{ Logo:}$$

$$I = \int_0^a dI(z) = \frac{M}{a} \int_0^a z^2 dz = \boxed{\frac{1}{3} M a^2}$$

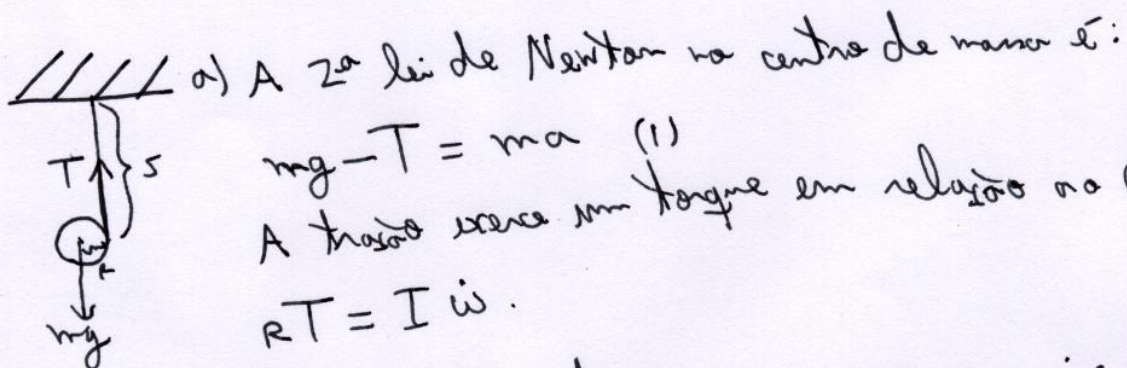
- b)  Na situação inicial (alçaço aberto), o centro de massa do alçaço está a uma altura $\frac{a}{2}$ do chão. Na situação final, o CM está à altura do chão. Assim, por conservação de energia mecânica:

$$T = Mg \frac{a}{2}, \text{ onde } T = \text{energia cinética de rotação do alçaço}$$

$$\text{Mas, } T = \frac{1}{2} I \omega^2 \Rightarrow \frac{1}{2} I \omega^2 = Mg \frac{a}{2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{Mg a}{I}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{3g}{a}}}$$

2)



a) A 2ª lei de Newton no centro de massa é:

$$mg - T = ma \quad (1)$$

A tensão exerce um torque em relação ao CM:

$$RT = I \dot{\omega}$$

Se a fita não é elástica, temos $v = \dot{s} = \omega R \Rightarrow a = \dot{\omega} R \Rightarrow \dot{\omega} = a/R$
Substituindo:

$$RT = I \frac{a}{R}$$

Mas, para um disco girando em torno de seu CM,
temos $I = \frac{1}{2} m R^2$:

$$RT = \frac{1}{2} m R a \Rightarrow T = \frac{1}{2} m a$$

Substituindo na Eq. (1), temos:

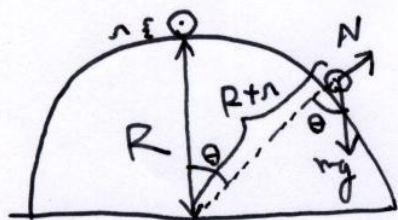
$$mg - \frac{1}{2} m a = m a \Rightarrow g = \frac{3}{2} a \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{3} g}$$

$$b) T = \frac{1}{2} m a = \frac{1}{2} m \cdot \frac{2}{3} g = \boxed{\frac{1}{3} m g}$$

c) s é simplesmente a quanto o centro de massa caiu depois de ~~ter~~ o "estalo" ter sido solto. Assim, usando a "Lei de Torricelli",
temos:

$$a = \ddot{s} = \frac{2}{3} g \quad , \quad v^2 = 2 a s = \frac{4}{3} g s \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{4}{3} g s}}$$

3)



a) O centro de massa da bola está a uma altura $R+r$, no início. A energia inicial é $mg(R+r)$. Depois de rolar um ângulo θ (ver figura), sua altura do

chão é $(R+r)\cos\theta$, e sua energia potencial é $mg(R+r)\cos\theta$.

A energia cinética do CM é $\frac{1}{2}mv^2$, e a en. cinética de rotação é $\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mr^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{5}mr^2\omega^2$. Como a bola ~~está~~ rola

sem deslizamento, $\omega = v/r$, e a en. cinética de rotação é:

$\frac{1}{5}mr^2 \frac{v^2}{r^2} = \frac{1}{5}mv^2$. A lei de conservação de energia fica:

$$mg(R+r) = mg(R+r)\cos\theta + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{5}mv^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mg(R+r)(1-\cos\theta) = \frac{7}{10}mv^2 \quad (1)$$

A condição para que a bola perca contato com a superfície é que a normal N se anule (ver figura), o que acontece quando a projeção da força de gravidade ~~na~~ direção radial for igual à força centrípeta:

$$mg\cos\theta = \frac{mv^2}{(R+r)} \Rightarrow v^2 = g(R+r)\cos\theta. \text{ Substituindo na Eq. (1):}$$

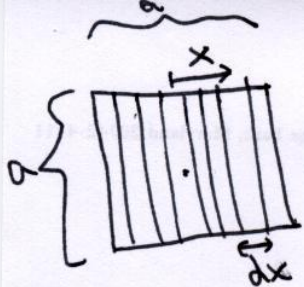
$$mg(R+r)(1-\cos\theta) = \frac{7}{10}mg(R+r)\cos\theta$$

$$\Rightarrow 1-\cos\theta = \frac{7}{10}\cos\theta \Rightarrow \boxed{\cos\theta = 10/17}$$

$$b) v^2 = (R+r)g\cos\theta = \frac{10}{17}(R+r)g \Rightarrow$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{10}{17}(R+r)g}}$$

LISTA 4 - C.A.M



1) $dI = dI_{cm} + x^2 dm$ ← teorema de Steiner

$dI = \frac{1}{12} a^2 dm + x^2 dm$

$$dI = \left(\frac{a^2}{12} + x^2 \right) dm$$

$$dm = a^2 D dx$$

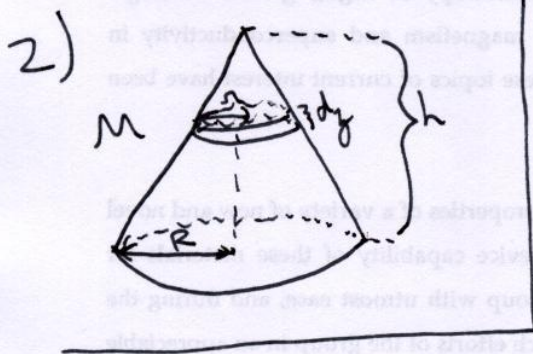
$$D = \frac{M}{a^3} = \text{densidade}$$

$$\Rightarrow dm = \frac{M}{a} dx$$

$$dI = \frac{M}{a} \left(\frac{a^2}{12} + x^2 \right) dx$$

$$I = \frac{M}{a} \left[\int_{-a/2}^{a/2} \frac{a^2}{12} dx + \int_{-a/2}^{a/2} x^2 dx \right] = \frac{M}{a} \left[\frac{a^3}{12} + \frac{a^3}{3 \cdot 4} \right]$$

$$= \cancel{\frac{1}{12} M a^2} \frac{1}{6} M a^2$$



$$dI(z) = \frac{1}{2} r^2 dm$$

$$dm(z) = \pi r^2 D dz \quad D = \text{densidade}$$

$$\frac{1}{3} \pi R^2 h \cdot D = M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = \frac{3M}{\pi R^2 h}$$

$$\Rightarrow dm(z) = \frac{3M \cdot \pi r^2}{\pi R^2 h} dz = \frac{3M r^2}{R^2 h} dz$$

$$\Rightarrow dI(z) = \frac{3M}{2 R^2 h} r^4 dz$$

Logo, $r = R - \frac{R}{h} z$. Assim:

$$dI(z) = \frac{3MR^2}{2h} \left(1 - \frac{z}{h} \right)^4 dz$$

$$\Rightarrow I = \frac{3MR^2}{2h} \int_0^h \left(1 - \frac{z}{h}\right)^4 dz$$

Seja $x = 1 - \frac{z}{h} \Rightarrow dx = -\frac{dz}{h} \Rightarrow dz = -h dx$

$x=1 \text{ para } z=0, \text{ e } x=0 \text{ para } z=h:$

$$I = -\frac{3}{2}MR^2 \int_1^0 x^4 dx = \frac{3}{2}MR^2 \int_0^1 x^4 dx = \frac{3}{10}MR^2$$

3) a) Mom. angular da haste: mVR . Por conservação de mom. ang.:

$$mVR = I\omega \approx \frac{1}{2}MR^2\omega \Rightarrow \omega = \frac{2mV}{MR}$$

se $m \ll M$

b) En. cinética inicial: $\frac{1}{2}mV^2$

En. cinética final: $\approx \frac{1}{2}I\omega^2$ (se $m \ll M$)

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}MR^2\omega^2 = \frac{1}{4}MR^2 \cdot \left(\frac{2mV}{MR}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}MR^2 \cdot \frac{4m^2V^2}{M^2R^2} = \frac{m^2}{M}V^2$$

Fração ~~de~~ perdida: $1 - \frac{\frac{m^2}{M}V^2}{\frac{1}{2}mV^2} = 1 - 2\frac{m}{M}$

$$4) E_i = MgR + \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} Mv^2$$

$$I = \frac{1}{2} MR^2 \quad \omega = \frac{v}{R} \text{ (sem deslizamento)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{4} MR^2 \frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{4} Mv^2$$

$$\Rightarrow E_i = MgR + \frac{3}{4} Mv^2$$

Na interação final, não há energia potencial:

$$E_f = Mgh$$

Anim:

$$MgR + \frac{3}{4} Mv^2 = Mgh \Rightarrow \boxed{h = R + \frac{3v^2}{4g}}$$

5) Até que a bola comence a girar sem deslizar, existe um torque em relação ao CM, devido à força de atrito:

$$\tau = F \cdot R = \mu_c \times gR = I \dot{\omega} = \frac{2}{5} MR^2 \dot{\omega} \Rightarrow \frac{2}{5} R \dot{\omega} = \mu_c g$$

$$\Rightarrow \dot{\omega} = \frac{5\mu_c g}{2R} \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{5\mu_c g}{2R} t}, \text{ pois } \omega(t=0) = 0, \text{ pela enunciada.}$$

A o mesmo tempo, a velocidade do centro de massa decresce:

$$\dot{v} = -\mu_c g \Rightarrow \boxed{v = v_0 - \mu_c g t}$$

No momento em que a condição $v = \omega R$ for satisfeita, começa a rolar sem deslizamento:

$$v_0 - \mu_c g t = \frac{5\mu_c g}{2} t \Rightarrow \mu_c g \left(\frac{5}{2} + 1 \right) t = v_0 \Rightarrow \frac{7}{2} \mu_c g t = v_0 \Rightarrow$$

$$(b) \Rightarrow \boxed{t = \frac{2v_0}{7\mu_c g}}$$

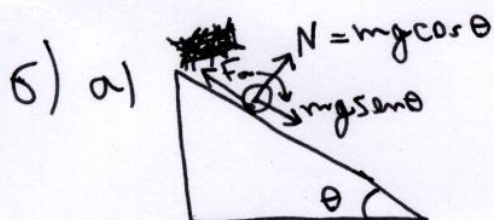
8

A distância percorrida d é dada por:

$$d = v_0 t - \frac{1}{2} \mu c g t^2 = v_0 \cdot \frac{2v_0}{\mu c g} - \frac{1}{2} \mu c g \cdot \frac{4v_0^2}{49 \mu c g^2}$$

$$= \frac{v_0^2}{\mu c g} \left(\frac{2}{7} - \frac{2}{49} \right) = \frac{12}{49} \frac{v_0^2}{\mu c g} \quad (a)$$

A vel. da bola é $v = v_0 - \mu c g t = v_0 - \mu c g \cdot \frac{2v_0}{\mu c g} =$
 $= v_0 \left(1 - \frac{2}{7} \right) = \frac{5}{7} v_0$



P/ o centro de massa (F_a = força de atrito).

$$m g \sin \theta - F_a = m a \quad (1)$$

O torque exercido na bola é:

$$\tau = F_a R = I \omega \quad (R = \text{raio da bola}).$$

Mas $I = \frac{2}{5} m R^2 \Rightarrow F_a R = \frac{2}{5} m R^2 \omega \Rightarrow F_a = \frac{2}{5} m R \omega$

Se o rolamento é sem deslizamento, $\omega = v/R$, e $a = \omega = a/R$:

$F_a = \frac{2}{5} m R \frac{a}{R} \Rightarrow F_a = \frac{2}{5} m a$. Substituindo na Eq. (1):

$m g \sin \theta = \frac{7}{5} m a \Rightarrow a = \frac{5}{7} g \sin \theta$

b) $F_a = \frac{2}{5} m a = \frac{2}{5} m \cdot \frac{5}{7} g \sin \theta = \frac{2}{7} m g \sin \theta$

c) A bola só consegue rolar sem deslizar se F_a for menor que a força máxima que o atrito estático é capaz de fornecer, que é $\mu_e N = \mu_e m g \cos \theta$. Assim, o ângulo máximo é dado por:

$\mu_e m g \cos \theta_m = \frac{2}{7} m g \sin \theta_m \Rightarrow \boxed{\tan \theta_m = \frac{7}{2} \mu_e}$

d) Nada muda.