

### FEP 0111 (noturno) - Segunda lista de exercícios

1. Vamos medir os movimentos do gafanhoto (massa  $m_g$ ) e da folha (massa  $m_f$ ) num referencial em repouso com relação à água. O momento antes do salto é nulo. Supondo que não haja movimento vertical da folha, e que perturbações na água sejam desprezíveis, a conservação do momento na direção horizontal implica que

$$m_g v_g \cos \theta + m_f v_f = 0,$$

sendo  $v_g$  e  $v_f$  as velocidades do gafanhoto e da folha logo após o salto, que se dá segundo um ângulo  $\theta$ . O tempo que o gafanhoto leva para retornar ao solo é  $t$ , igual ao dobro do tempo correspondente à altura máxima; ou seja,

$$0 = v_g \sin \theta - g \frac{t}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2}{g} v_g \sin \theta,$$

de modo que seu deslocamento é

$$\Delta x_g = v_g \cos \theta \cdot t = \frac{v_g^2}{g} \sin (2\theta).$$

Durante esse mesmo tempo, o deslocamento da beirada oposta da folha é

$$\Delta x_f = v_f \cdot t = -\frac{m_g}{m_f} v_g \cos \theta \cdot \frac{2}{g} v_g \sin \theta = -\frac{m_g}{m_f} \Delta x_g.$$

Escolhendo como origem do referencial a posição do gafanhoto no momento do salto, a condição para que o gafanhoto torne a cair sobre a folha, de comprimento  $\ell$ , é

$$\Delta x_g \leq \ell + \Delta x_f.$$

Portanto,

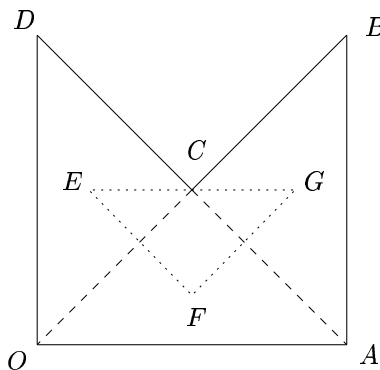
$$\begin{aligned} \Delta x_g \leq \ell - \frac{m_g}{m_f} \Delta x_g &\quad \Rightarrow \quad \Delta x_g \leq \frac{\ell}{1 + \frac{m_g}{m_f}} \\ \Rightarrow \quad \sin (2\theta) &\leq \frac{g}{v_g^2} \cdot \frac{\ell}{1 + \frac{m_g}{m_f}}. \end{aligned}$$

Temos então uma desigualdade envolvendo a função  $\sin (2\theta)$  e uma constante, que podemos chamar de  $c$ . Fazendo um gráfico de  $\sin (2\theta)$  entre  $\theta = 0$  e  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , vemos que, para  $c < 1$ , há duas regiões que satisfazem a desigualdade, correspondendo, por simetria, a  $0 \leq \theta \leq \theta_1$  e  $\frac{\pi}{2} - \theta_1 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , sendo  $\theta_1$  o menor ângulo em que  $\sin (2\theta)$  cruza a reta horizontal de ordenada  $c$ . Utilizando  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ,  $v_g = 4 \text{ m/s}$ ,  $\ell = 0,3 \text{ m}$  e  $m_g/m_f = 1/4$ , temos

$$\begin{aligned} \sin (2\theta) &\leq 0,147 \\ \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 4,23^\circ \\ 85,7^\circ \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \end{aligned}$$

2. Escolhendo como origem o vértice inferior esquerdo da placa, ou seja, o ponto  $O$  da figura, as coordenadas dos vértices, em unidades do lado do quadrado  $OABD$ , são

$$\begin{aligned}(x_O, y_O) &= (0, 0) \\ (x_A, y_A) &= (1, 0) \\ (x_B, y_B) &= (1, 1) \\ (x_C, y_C) &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ (x_D, y_D) &= (0, 1)\end{aligned}$$



- (a) Para calcular a posição do centro de massa da placa, vamos determinar primeiro as posições dos centros de massa dos triângulos  $OCD$ ,  $OAC$  e  $ABC$ .

- Centro de massa do triângulo  $OCD$  (ponto  $E$ ):

$$x_E = \frac{1}{3}x_C = \frac{1}{6}, \quad y_E = \frac{1}{2} \quad (\text{por simetria}).$$

- Centro de massa do triângulo  $OAC$  (ponto  $F$ ):

$$x_F = \frac{1}{2} \quad (\text{por simetria}), \quad y_F = \frac{1}{3}y_C = \frac{1}{6}.$$

- Centro de massa do triângulo  $ABC$  (ponto  $G$ ):

$$x_G = x_A - \frac{1}{3}(x_A - x_C) = \frac{5}{6}, \quad y_G = \frac{1}{2} \quad (\text{por simetria}).$$

O centro de massa da placa  $OABCD$  é então equivalente ao centro de massa das três “partículas”  $E$ ,  $F$  e  $G$ :

$$\begin{aligned}x_{CM} &= \frac{1}{2} \quad (\text{por simetria}), \\ y_{CM} &= y_C - \frac{1}{3}(y_C - y_F) = \frac{7}{18}.\end{aligned}$$

- (b) O centro de massa do triângulo  $BCD$ , correspondente ao que falta para transformar a placa no quadrado  $OABD$ , é o ponto  $H$  de coordenadas

$$x_H = \frac{1}{2} \quad (\text{por simetria}), \quad y_H = y_B - \frac{1}{3}(y_B - y_C) = \frac{5}{6};$$

o centro de massa do quadrado é obviamente o ponto  $C$ . A razão entre as massas do triângulo e do quadrado, representados respectivamente por “partículas” nos pontos  $H$  e  $C$ , é  $m_H/m_C = 1/4$ , já esta é a razão entre as áreas. Portanto, considerando negativa a massa do triângulo, temos

$$\begin{aligned}x_{CM} &= \frac{m_C x_C - m_H x_H}{m_C - m_H} = \frac{1}{2}, \\y_{CM} &= \frac{m_C y_C - m_H y_H}{m_C - m_H} = \frac{7}{18}.\end{aligned}$$

3. (a) É importante lembrar que, em média, a variação da massa do avião vem apenas do consumo de combustível, que vamos desprezar. Para a combustão do ar, é necessário inicialmente absorvê-lo a uma taxa  $\frac{dm}{dt}$ , gerando um empuxo negativo  $\frac{dm}{dt}v$ , sendo  $v$  a velocidade relativa entre o ar e o avião (ou seja, a velocidade do avião com respeito ao solo); em seguida, após a combustão, o ar é ejetado à mesma taxa  $\frac{dm}{dt}$ , gerando um empuxo positivo  $\frac{dm}{dt}v_{\text{rel}}$ , sendo  $v_{\text{rel}}$  a velocidade de ejeção do ar com relação ao avião. O empuxo total é assim

$$F = \frac{dm}{dt} (v_{\text{rel}} - v) = 6,83 \times 10^4 \text{ N},$$

com  $\frac{dm}{dt} = 150 \times 1,3 \text{ kg/s}$ ,  $v_{\text{rel}} = 600 \text{ m/s}$  e  $v = 900 \text{ km/h} = 250 \text{ m/s}$ .

- (b) A potência útil dos jatos é a força exercida por eles sobre o avião, multiplicada pela velocidade que imprimem. Portanto,

$$W = F \cdot v = \frac{dm}{dt} (v_{\text{rel}} - v) \cdot v = 1,7 \times 10^7 \text{ W}.$$

4. (a) Por conservação do momento angular sabemos que, sendo  $m = m_1 + m_2 + m_3$  a massa do avião e  $\vec{v}$  sua velocidade ao explodir,

$$m\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \frac{m_1}{m}\vec{v}_1 + \frac{m_2}{m}\vec{v}_2 + \frac{m_3}{m}\vec{v}_3,$$

de modo que

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{4000}{8000} (200\hat{i} + 25\hat{k}) + \frac{2000}{8000} (-50\hat{i} + 50\hat{j} - 25\hat{k}) + \frac{2000}{8000} (-50\hat{j} - 25\hat{k}) \\&\Rightarrow \quad \vec{v} = 87,5\hat{i}\end{aligned}$$

- (b) O momento linear do avião ao explodir era

$$\vec{p} = m\vec{v} = 8000 \cdot 87,5\hat{i} = 7 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{s}$$