

FEP 0111 (diurno) - Décima lista de exercícios

1. A pressão num ponto situado a uma profundidade H abaixo de N_0 é a mesma nos dois ramos. Portanto

$$p_1 = p_2 + \rho g(h + H).$$

Por outro lado, para um fluido incompressível, temos

$$HD^2 = hd^2 \Rightarrow H = \frac{d^2}{D^2}h,$$

de modo que

$$p_1 = p_2 + \rho g \left(h + \frac{d^2}{D^2}h \right) \Rightarrow p_1 - p_2 = \rho g \left(1 + \frac{d^2}{D^2} \right) h.$$

2. (a) Num ponto qualquer do fluido, situado a uma profundidade z , a pressão é $p = p_0 + \rho gz$, sendo p_0 a pressão na superfície do fluido ($z = 0$). Sobre um elemento de área dA situado à profundidade z , a força exercida exclusivamente pelo fluido é

$$dF = (p - p_0)dA = \rho gz dA.$$

Integrando sobre toda a área A , temos

$$F = \rho g \int_A z da.$$

Como a placa é homogênea, ou seja, sua densidade superficial de massa $\sigma = M/A$ é constante, a coordenada z do centróide de A é

$$\bar{z} = \frac{1}{M} \int_A z dM = \frac{1}{A} \int_A z dA,$$

de modo que podemos escrever

$$F = \rho g \bar{z} A.$$

- (b) Sendo θ a inclinação da parede em relação à vertical, o torque em relação a OO' exercido pelo fluido sobre o elemento de área dA é

$$d\tau = \frac{z}{\cos \theta} dF = \frac{\rho g}{\cos \theta} z^2 dA,$$

e integrando sobre a área A chegamos a

$$\tau = \frac{\rho g}{\cos \theta} \int_A z^2 dA.$$

Supondo que toda a força fosse aplicada a uma profundidade z_0 , teríamos, utilizando o resultado do item (a),

$$\tau = \frac{z_0}{\cos \theta} F = \frac{\rho g z_0}{\cos \theta} \bar{z} A,$$

e comparando as duas últimas equações chegamos a

$$z_0 = \frac{1}{\bar{z} A} \int_A z^2 dA.$$

3. (a) Pelo princípio de Arquimedes, sendo ΔV o volume de gelo que afunda na água, m_g a massa do cubo de gelo e ρ_a a densidade da água, temos

$$m_g g = \rho_a \Delta V g \Rightarrow \Delta V = m_g / \rho_a.$$

Supondo que o copo seja cilíndrico, o nível de água h logo após a introdução do gelo é tal que

$$hA = V + \Delta V,$$

sendo A a área da base do copo e V o volume de água presente. Quando a massa m_g de gelo derreter e atingir a temperatura da água, sua densidade será ρ_a , de modo que ocupará um volume m_g / ρ_a e o nível de água será tal que

$$h' A = V + \frac{m_g}{\rho_a} = V + \Delta V = hA,$$

ou seja, permanecerá igual.

- (b) O volume de água deslocado pelo barco quando estão a bordo o homem e pedra é

$$\Delta V = \frac{M + m}{\rho_a},$$

sendo M a massa do barco somada à do homem, e m a massa da pedra. Se A é a área da base da piscina, o nível inicial de água é tal que

$$hA = V + \Delta V = V + \frac{M + m}{\rho_a}.$$

Quando a pedra é jogada na água, supondo que ela afunde, ou seja, que sua densidade ρ_p seja maior que a da água, o novo nível de água é tal que

$$h' A = V + \Delta V' + \Delta V'',$$

com $\Delta V' = M / \rho_a$ o novo volume de água deslocado pelo barco e $\Delta V'' = m / \rho_p$ o volume ocupado pela pedra. Subtraindo os níveis de água temos

$$h' - h = \frac{1}{A} \left(\frac{M}{\rho_a} + \frac{m}{\rho_p} - \frac{M + m}{\rho_a} \right) = \frac{m}{A} \cdot \frac{\rho_a - \rho_p}{\rho_a \rho_p} < 0,$$

porque $\rho_p > \rho_a$. Portanto, o nível de água desce.