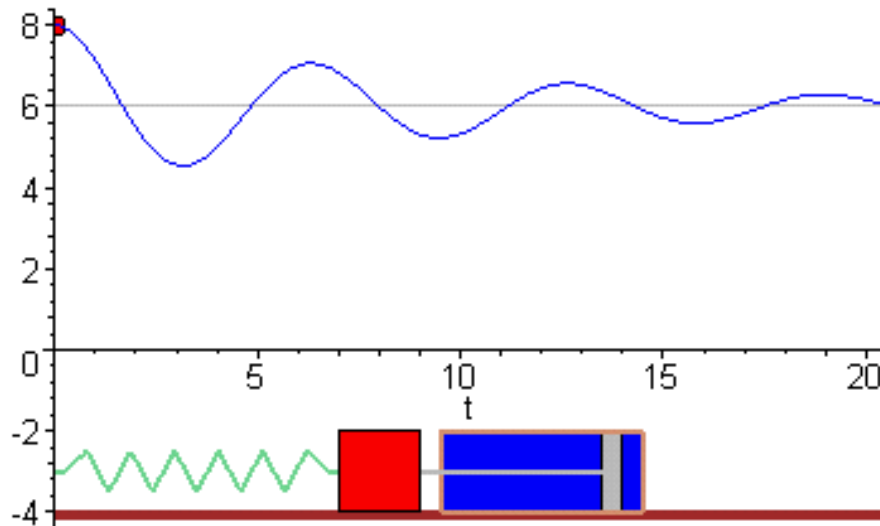


Aula 5 – oscilador harmônico amortecido

- Escrever a equação diferencial do oscilador harmônico amortecido (OHA) e reconhecer seus parâmetros.
- Reconhecer os diferentes regimes de amortecimento e suas soluções.
- Escrever as soluções do OHA em notação complexa e obter seus parâmetros a partir de condições iniciais ou equivalentes.
- Discutir o balanço de energia em um OHA.

Oscilador harmônico amortecido



$$\vec{F}_v = -\rho \vec{v}$$

Equação de movimento:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \rho \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Ou, dividindo por m :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\gamma = \frac{\rho}{m}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Balanço de energia

- Da conservação da energia para o sistema bloco + mola, durante um intervalo de tempo curto devemos ter

$$\Delta E = W_{\text{ext}} = -\rho v \Delta x.$$

- Logo, para um intervalo de tempo infinitesimal,

$$\frac{dE}{dt} = -\rho v \frac{dx}{dt} = -\rho v^2 \leq 0.$$

- Como esperado, o oscilador deve retornar ao repouso na origem.

Solução particular (complexa)

- Forma: $z(t) = e^{pt}$ A substituição na equação diferencial leva à
→ equação característica: $p^2 + \gamma p + \omega_0^2 = 0$

2 raízes: $p_{(\pm)} = -\frac{\gamma}{2} \pm i \omega$

Frequência angular:

$$\omega = \sqrt{\omega^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$$

Combinando linearmente as duas soluções
→ solução geral:

$$z(t) = \alpha e^{p_{(-)}t} + \beta e^{p_{(+)}t}$$

Soluções do OHA (parte real)

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2$$

$\omega^2 > 0$ Amortecimento fraco (= subcrítico)

$$x(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$$

$\omega^2 < 0$ Amortecimento forte (= supercrítico)

$$x(t) = A e^{-\left(\frac{\gamma}{2} - \beta\right)t} + B e^{-\left(\frac{\gamma}{2} + \beta\right)t}$$

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$$

$\omega^2 = 0$ Amortecimento crítico:

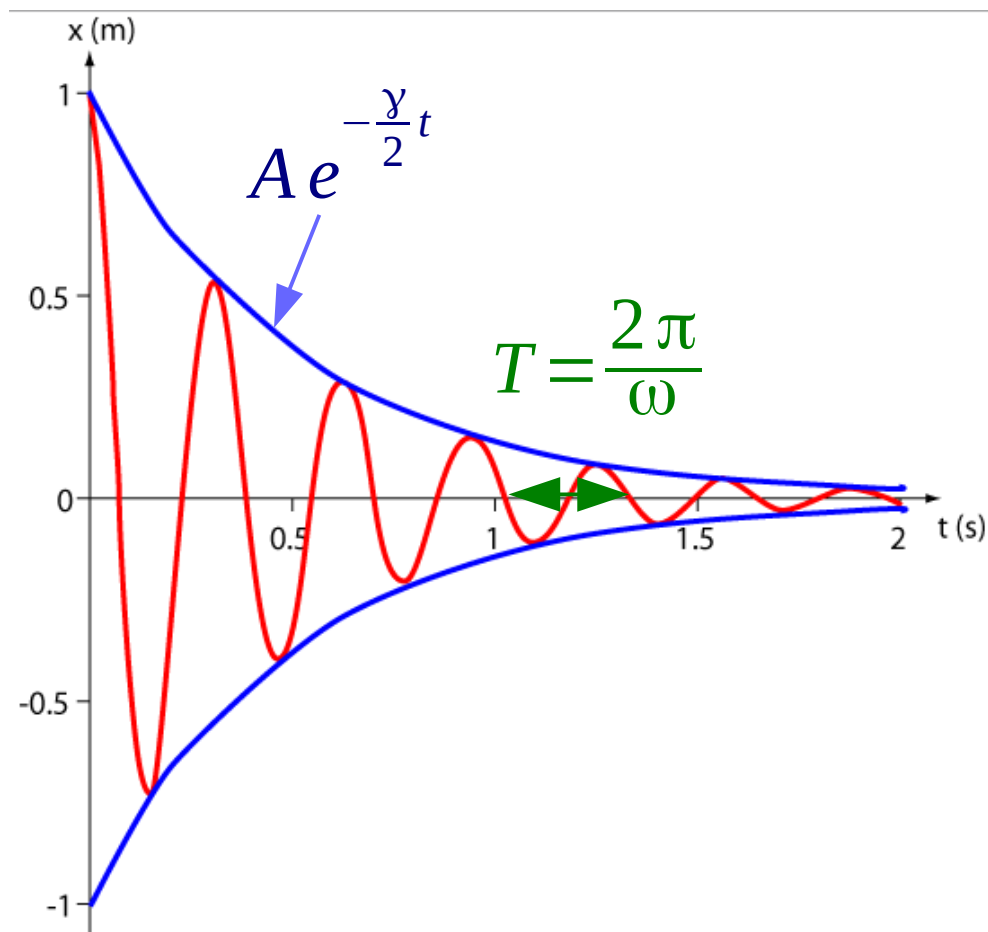
$$x(t) = (A + Bt) e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

Frequência e atenuação da oscilação: (amortecimento fraco)

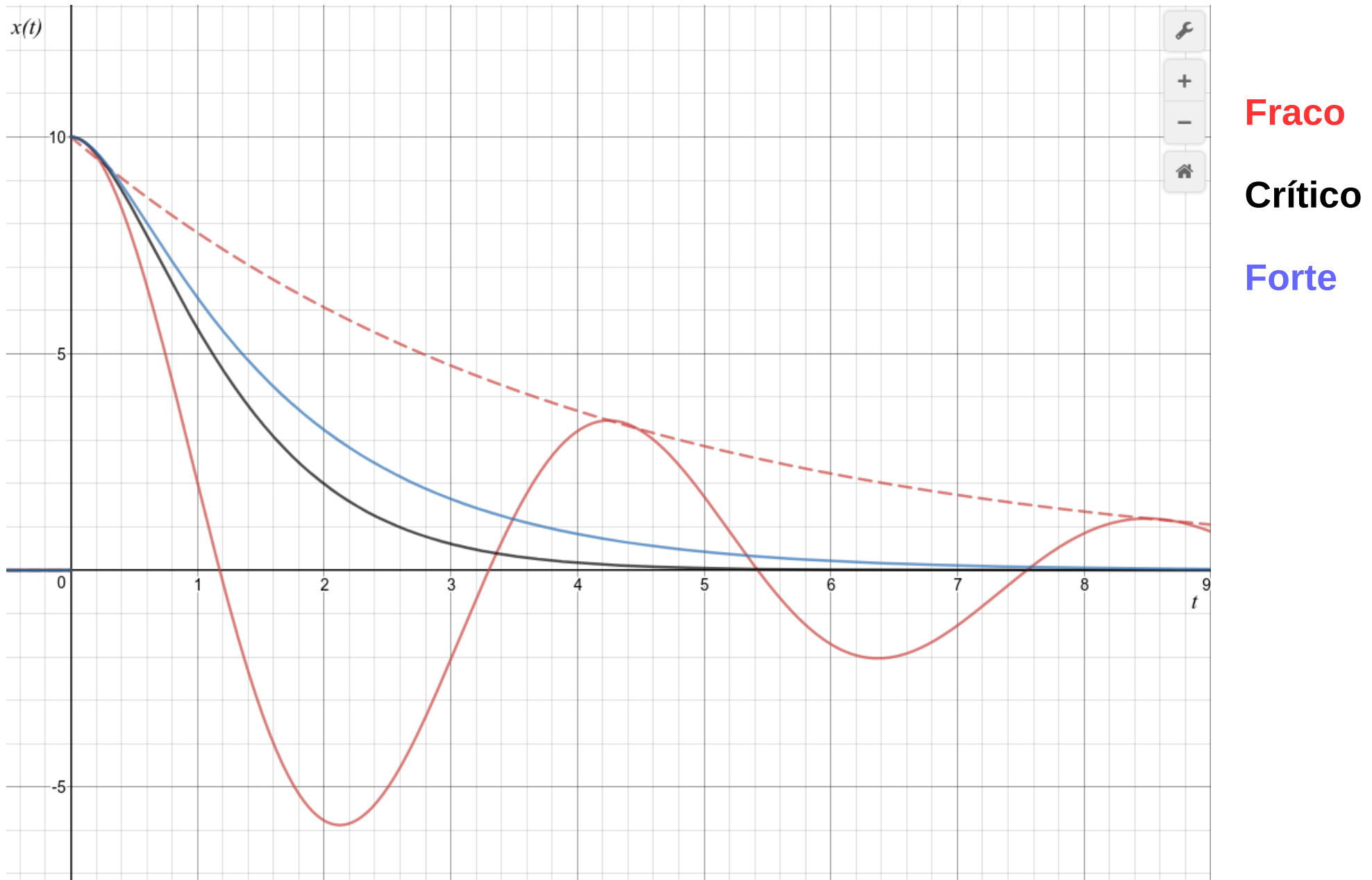
$$\omega^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 > 0 \quad x(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \phi)$$

$$\gamma = \frac{\rho}{m}$$

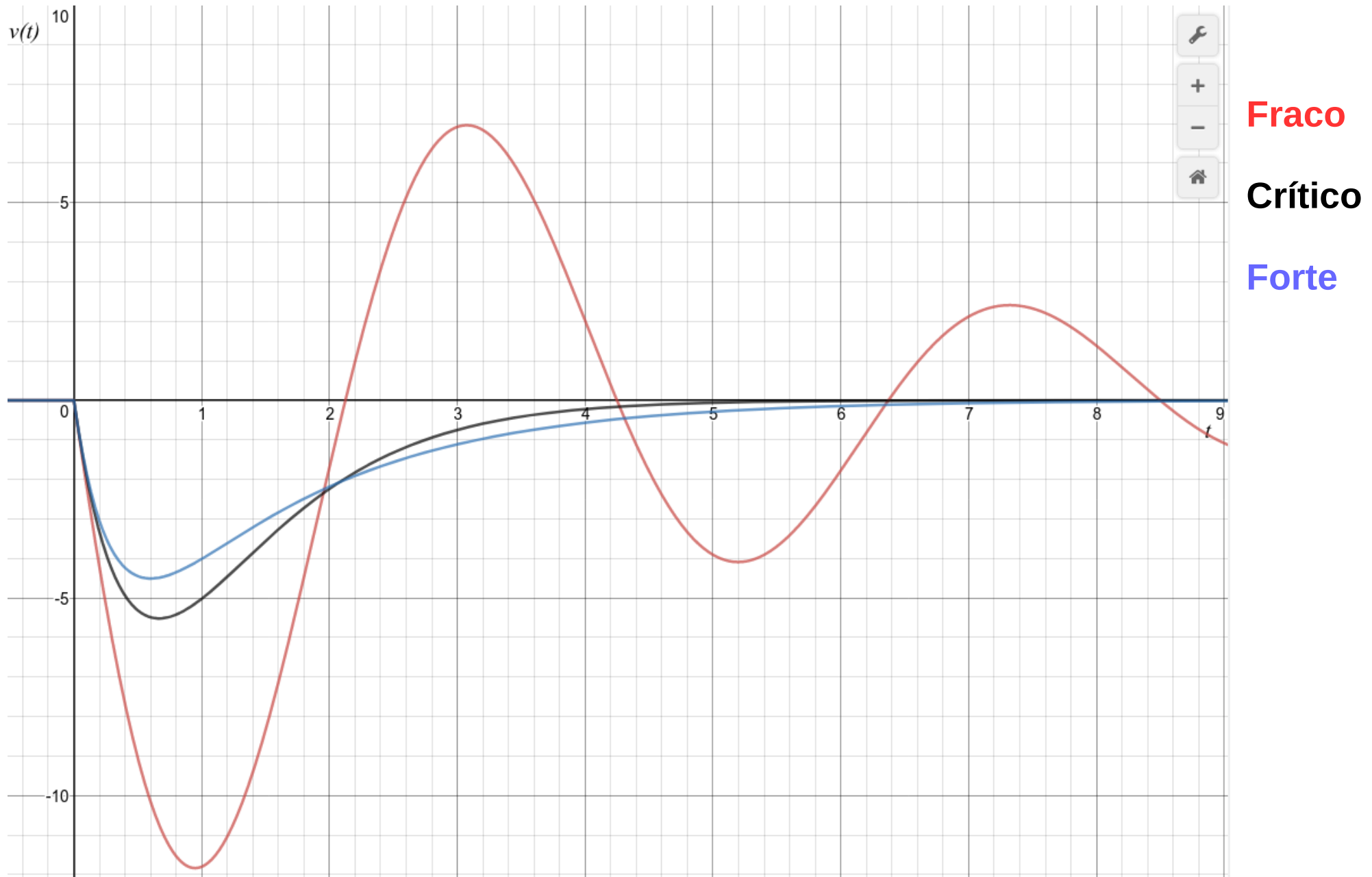
$$\vec{F}_v = -\rho \vec{v}$$



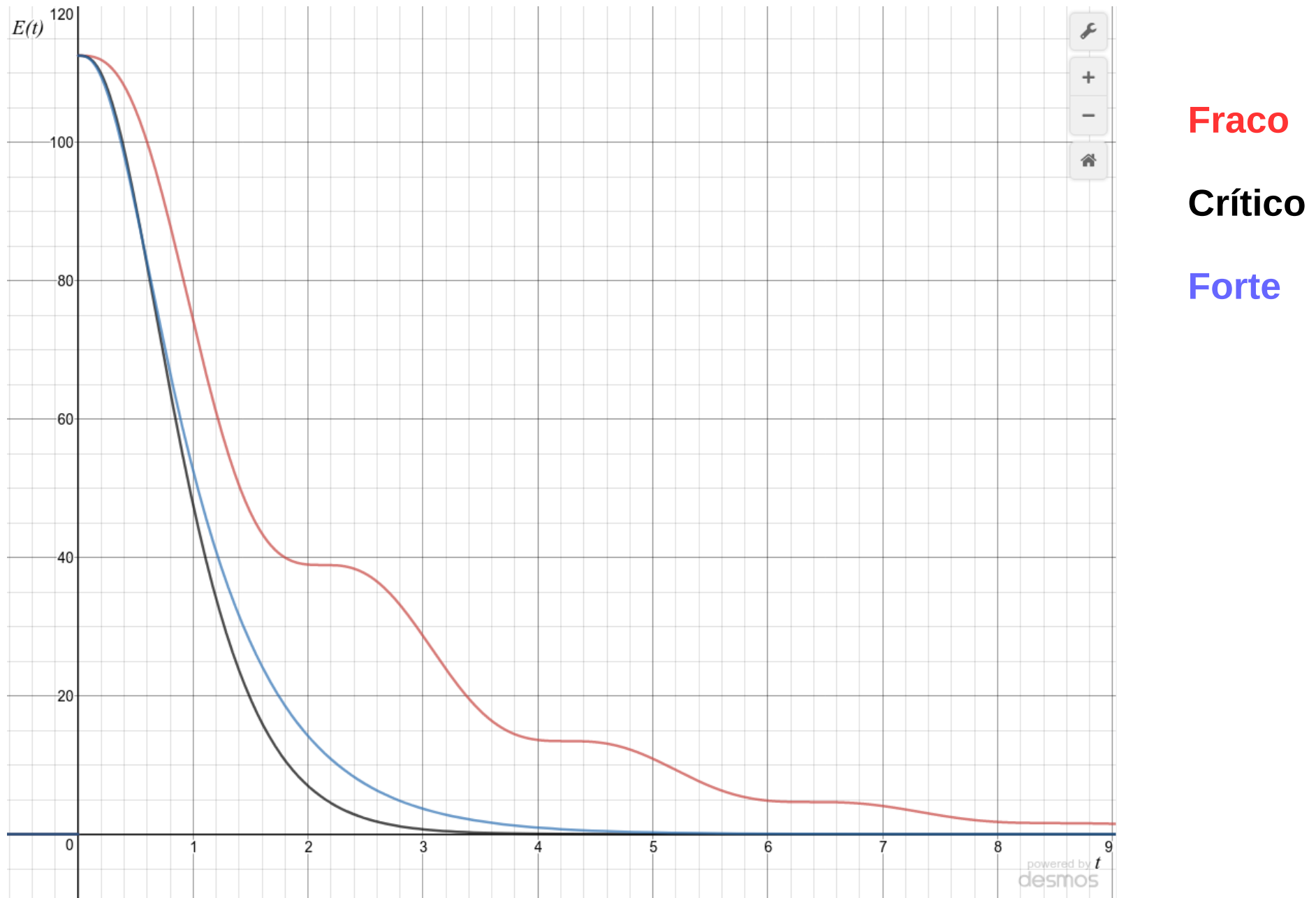
Regimes de amortecimento: $x(t)$



Regimes de amortecimento: $v(t)$

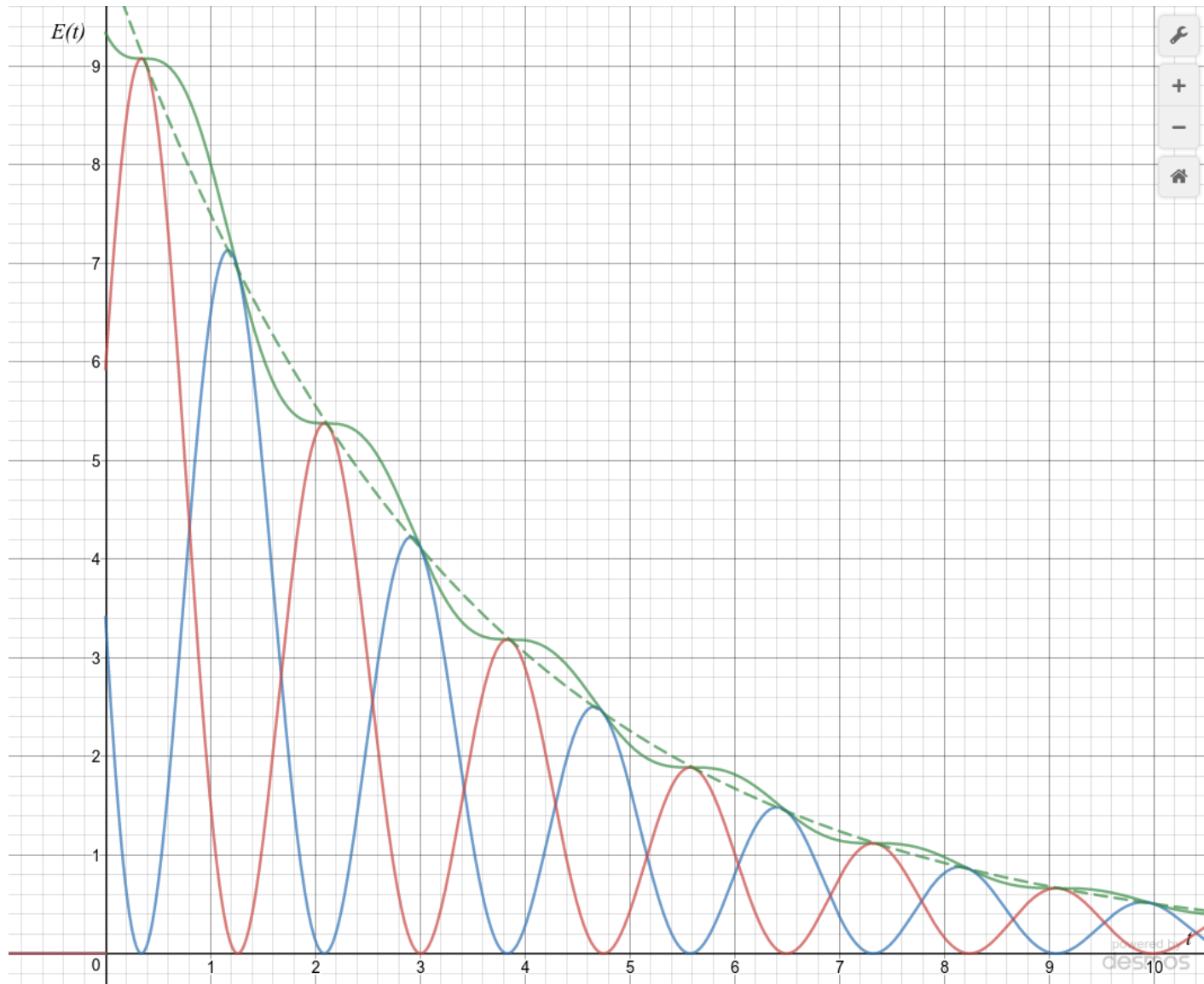


Regimes de amortecimento: $E(t)$



Regime de amortecimento fraco:

$E(t)$, $K(t)$ e $U(t)$

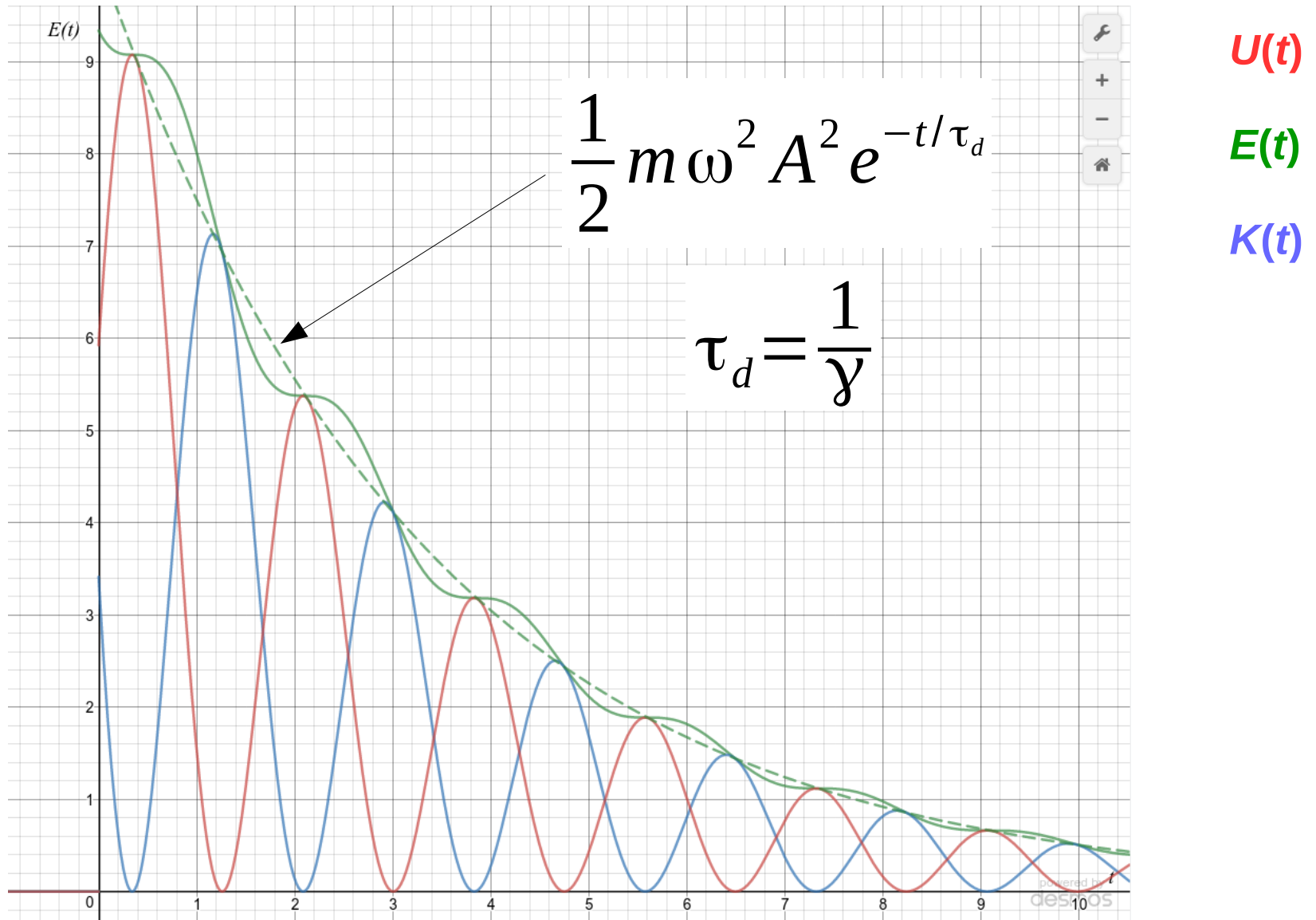


??

??

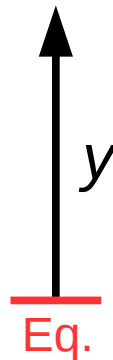
??

Regime de amortecimento fraco: $E(t)$, $K(t)$ e $U(t)$

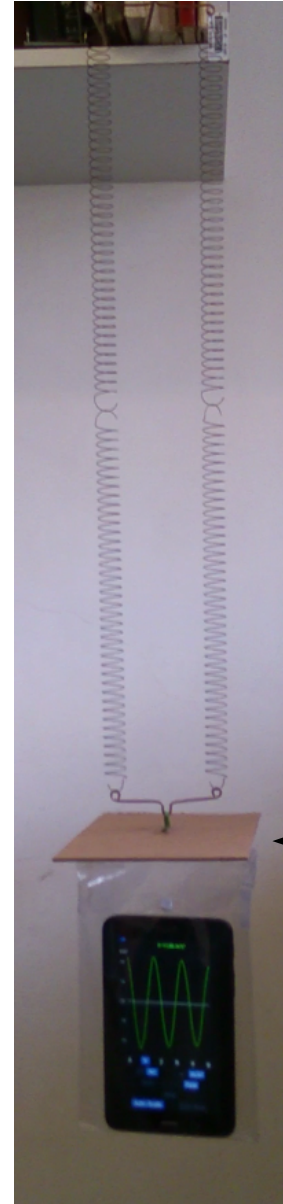


Medidas experimentais com acelerômetro

“SEM”
amortecimento

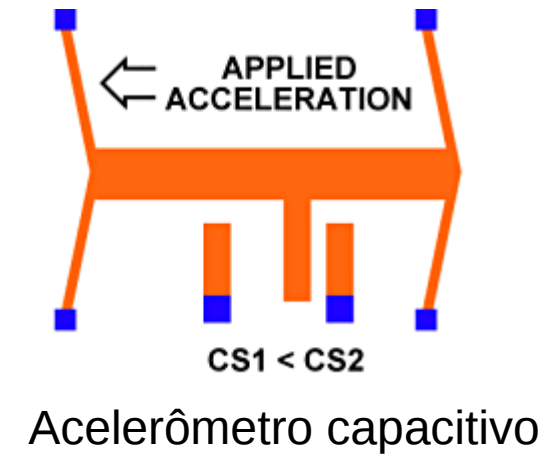
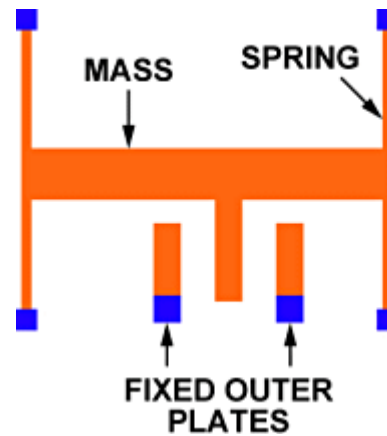
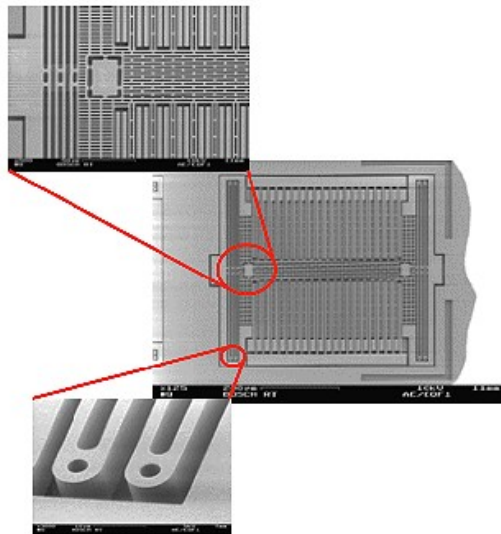
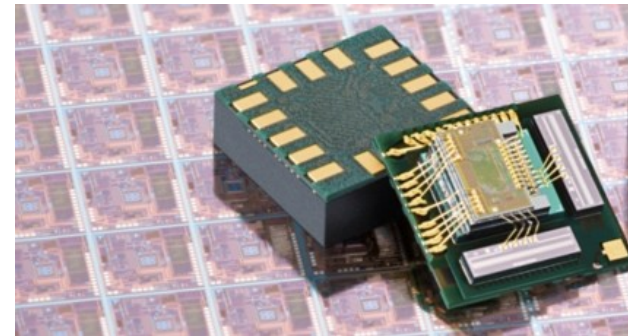
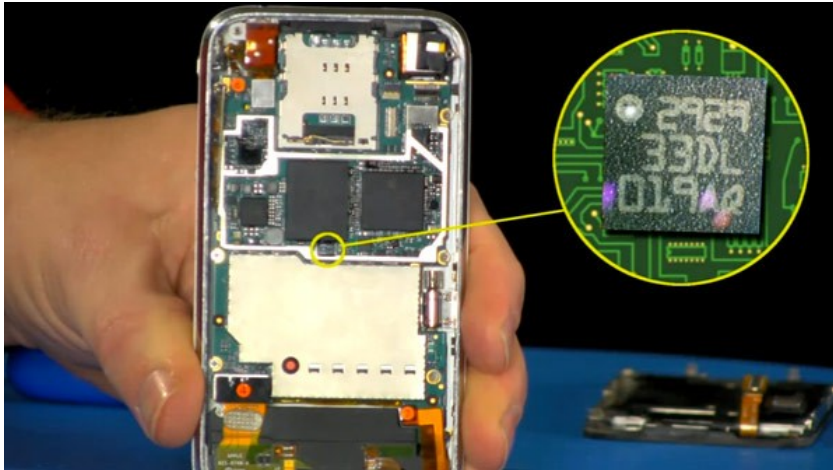


“COM”
amortecimento

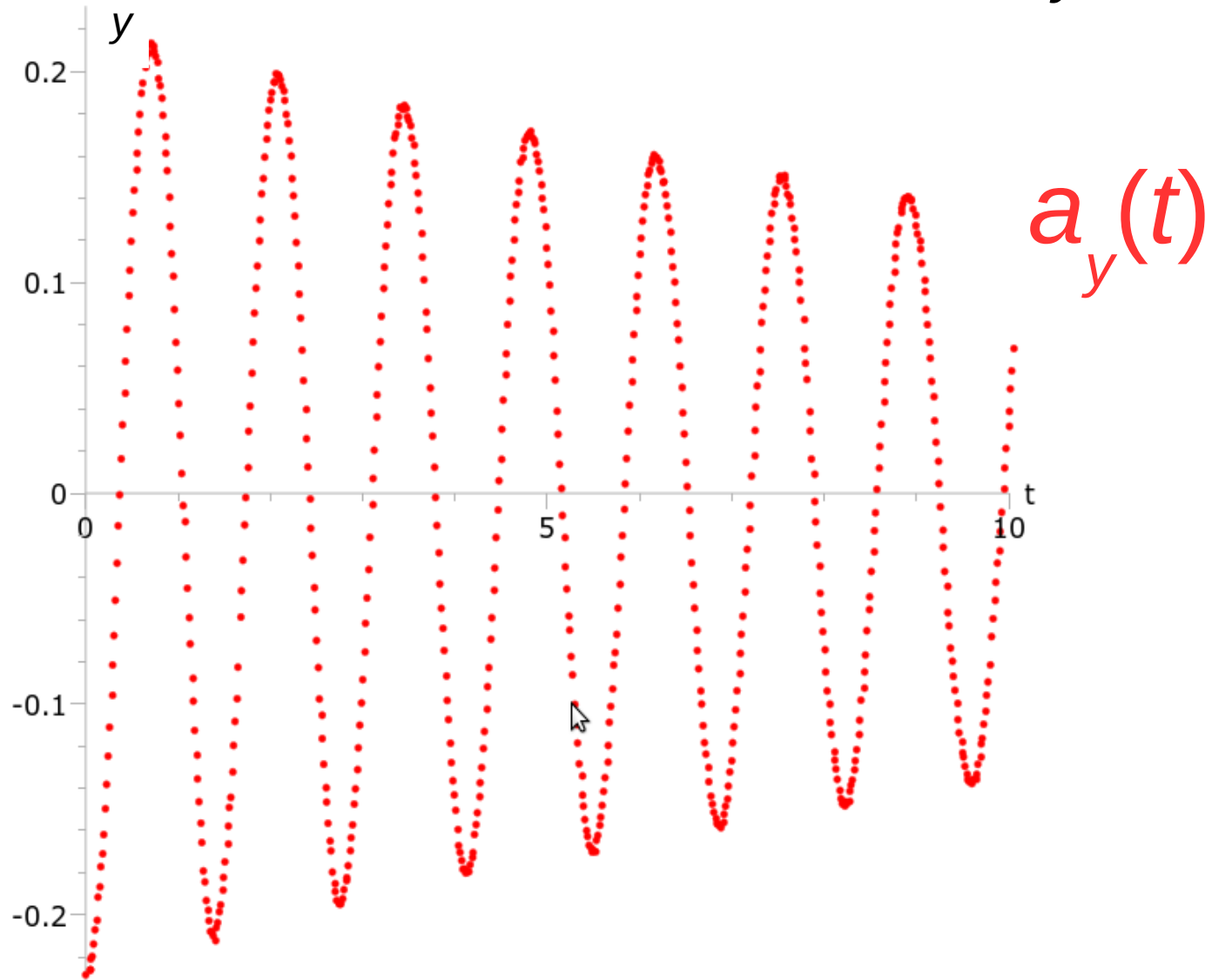


Mostrar videos

Acelerômetro de smartphone/tablet

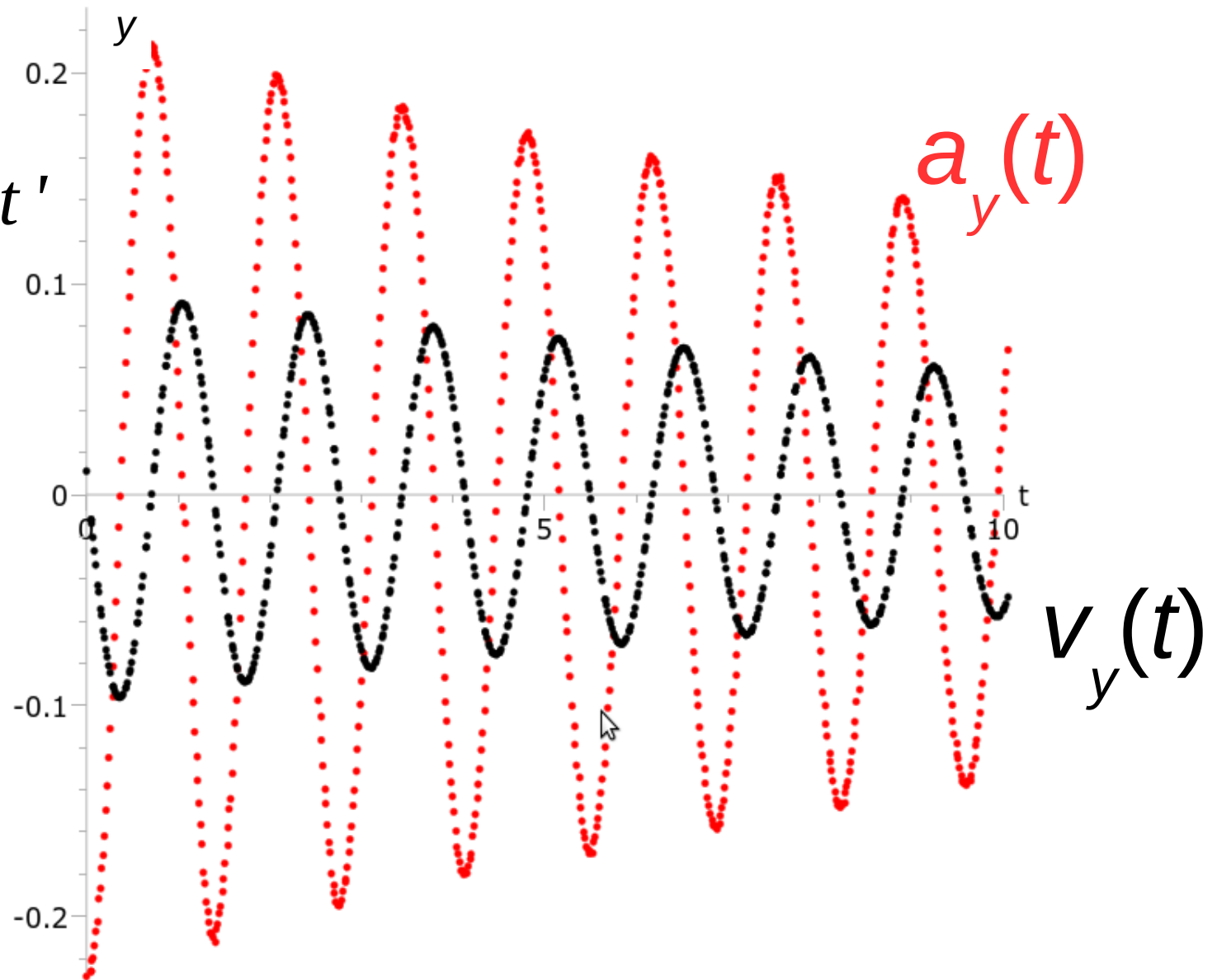


Dados da aceleração $a_y(t)$



Velocidade $v_y(t)$

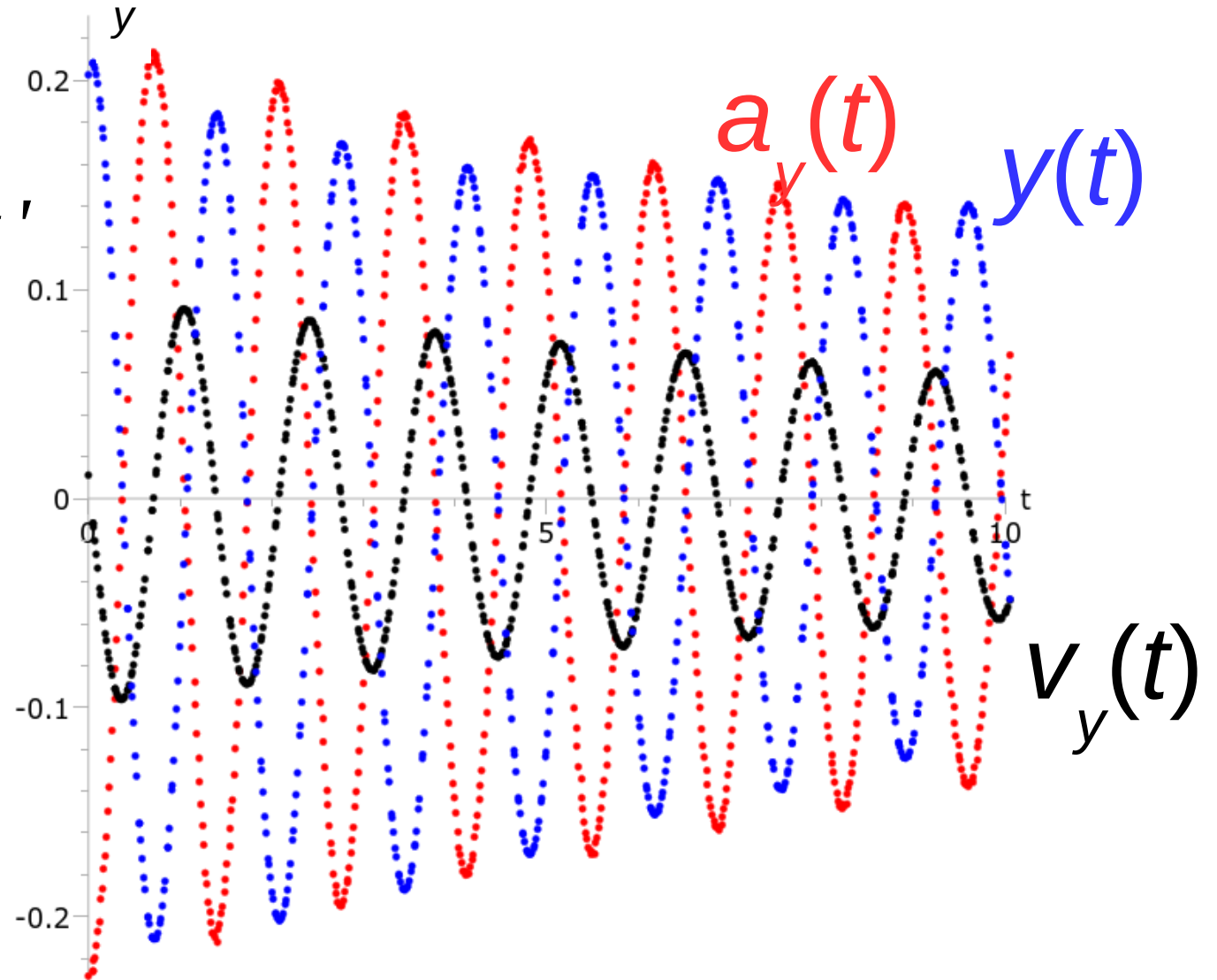
$$v_y = v_{y0} + \int_0^t a_y dt'$$



Posição $y(t)$

$$v_y = v_{y0} + \int_0^t a_y dt'$$

$$y = y_0 + \int_0^t v_y dt'$$



Fechamento da parte 1 (SEM)

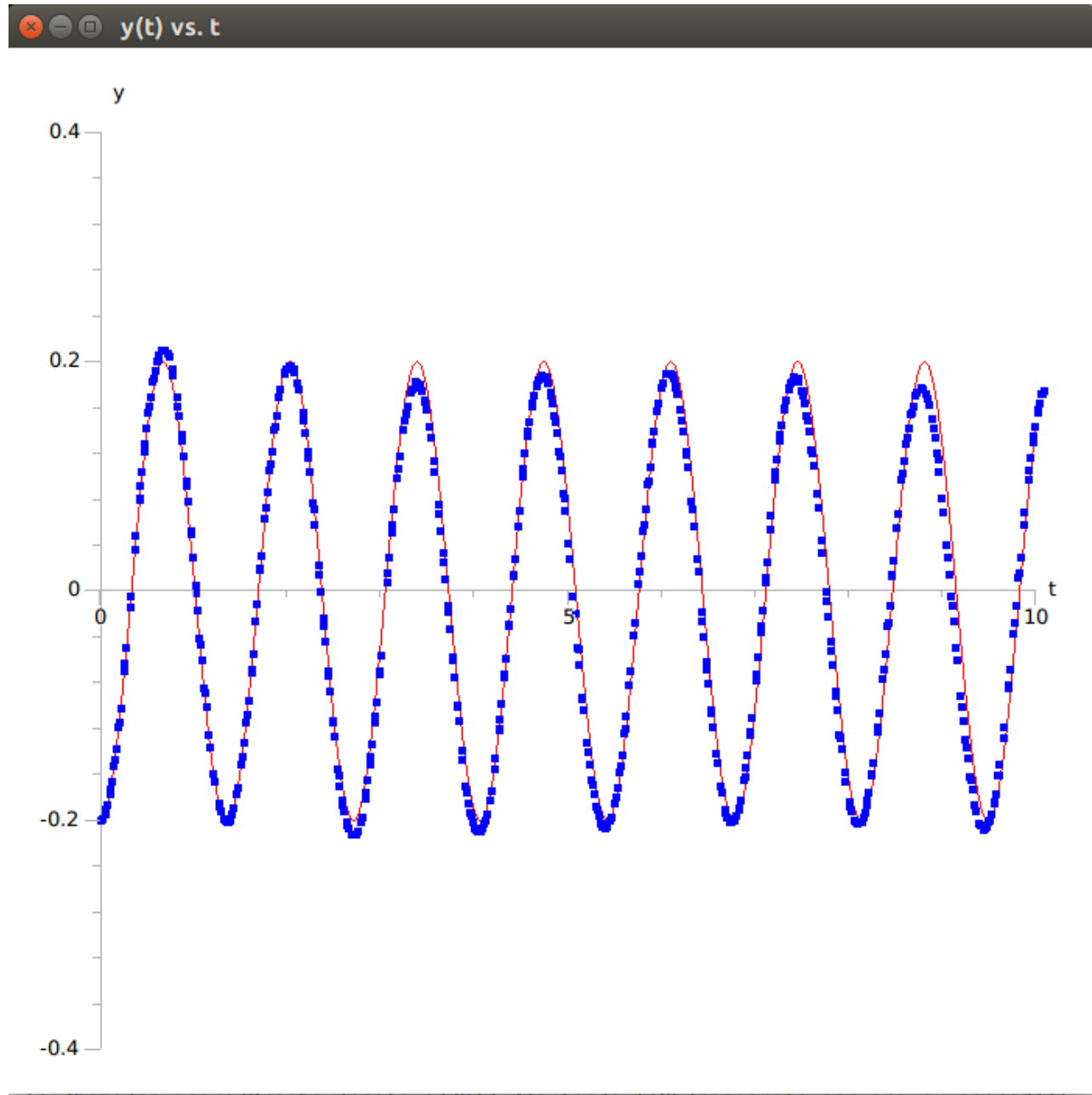
$$7T \simeq 9,5\text{ s}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$k = m\omega_0^2 \simeq 7,63\text{ N/m}$$

$$v_0 = 0$$

$$y_0 = -0,2\text{ m}$$



Fechamento da parte 1 (COM)

Solução geral para amortecimento fraco:

$$y(t) = A e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos(\omega t + \phi)$$

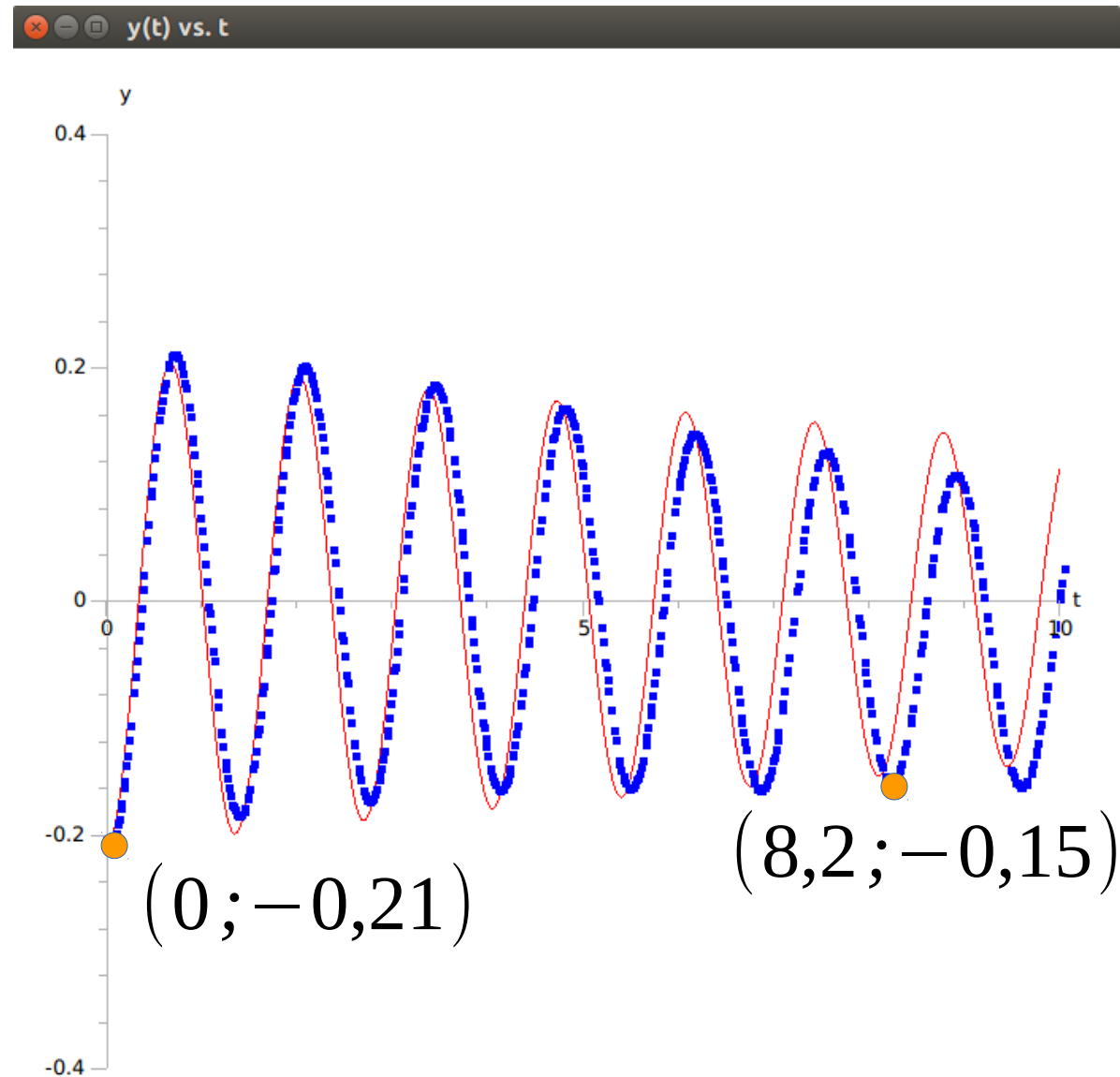
Se t_1 e t_2 são vales:

$$\frac{y_2}{y_1} \equiv \frac{y(t_2)}{y(t_1)} = e^{-\frac{\gamma(t_2 - t_1)}{2}}$$

Coeficiente ρ :

$$\rho = m \gamma = -2 \ln \frac{(y_2 / y_1)}{t_2 - t_1}$$

$$\rho \simeq 0,03 \text{ kg/s}$$



Fechamento da parte 2

<https://www.grc.nasa.gov/www/K-12/airplane/dragosphere.html>

<https://www.grc.nasa.gov/www/K-12/airplane/shaped.html>

$$\text{coeficiente} = \frac{1}{2} C_d d_{\text{meio}} A$$

$$C_d = 2,6$$

Densidade do ar a 20° C:

$$d_{\text{meio}} = 1,2 \text{ kg/m}^3$$

Área da seção transversal:

$$A = 0,24 \times 0,155 \text{ m}^2$$

