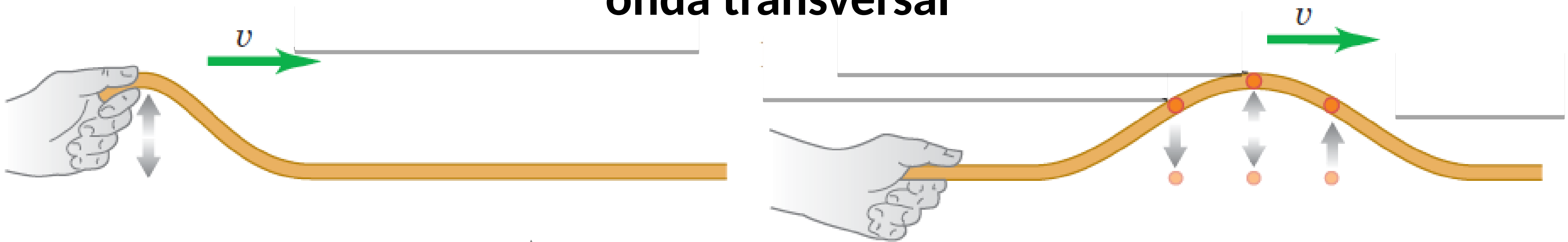
Aula 12 – Ondas transversais

Objetivos:

- Descrever matematicamente o movimento de um pulso em uma corda.
- Deduzir a equação de uma onda transversal em um sólido a partir de um modelo microscópico e encontrar a sua solução geral.
- Relacionar a velocidade da onda transversal com grandezas macroscópicas.

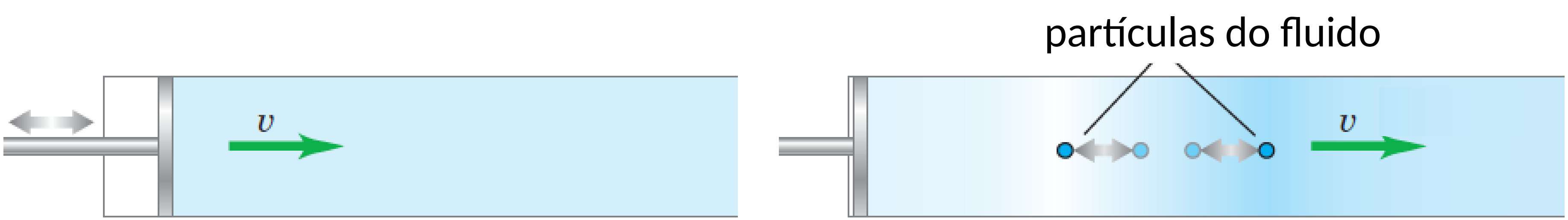
Ondas longitudinais e transversais

onda transversal



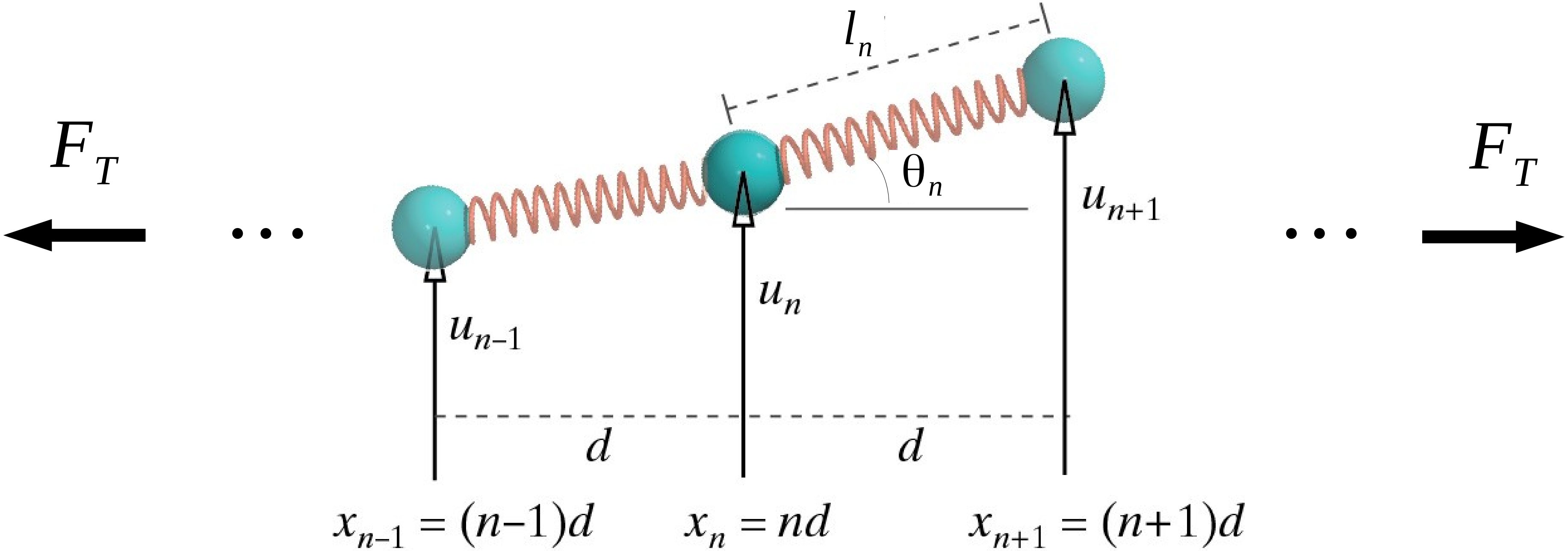
perturbação propagação

onda longitudinal



perturbação propagação

Modelo microscópico de uma corda



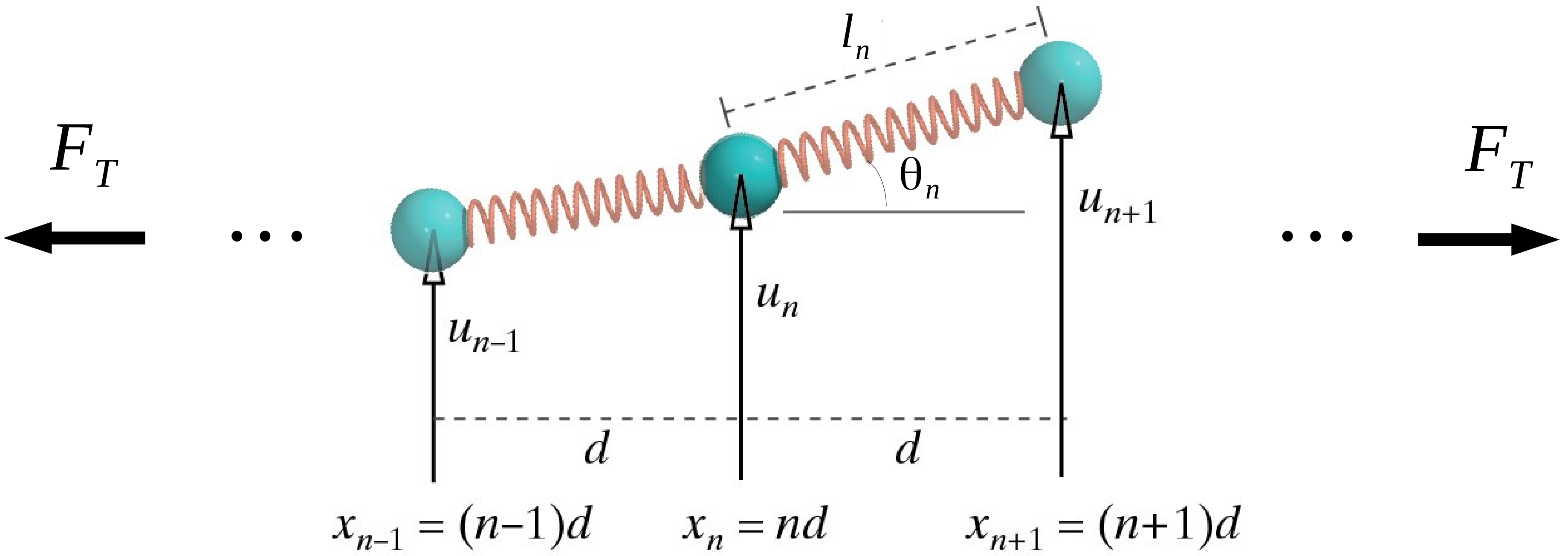
Corda na horizontal (todas as molas com comprimento $l_n=d>d_0$):

$$l_n = d\,,\quad u_n = 0,\quad F_T = k_m\left(d - d_0\right)$$

Corda deformada, supondo deslocamentos verticais:

$$l_n \cos\theta_n = d\,,\;\; u_n \neq 0$$

Modelo microscópico de uma corda

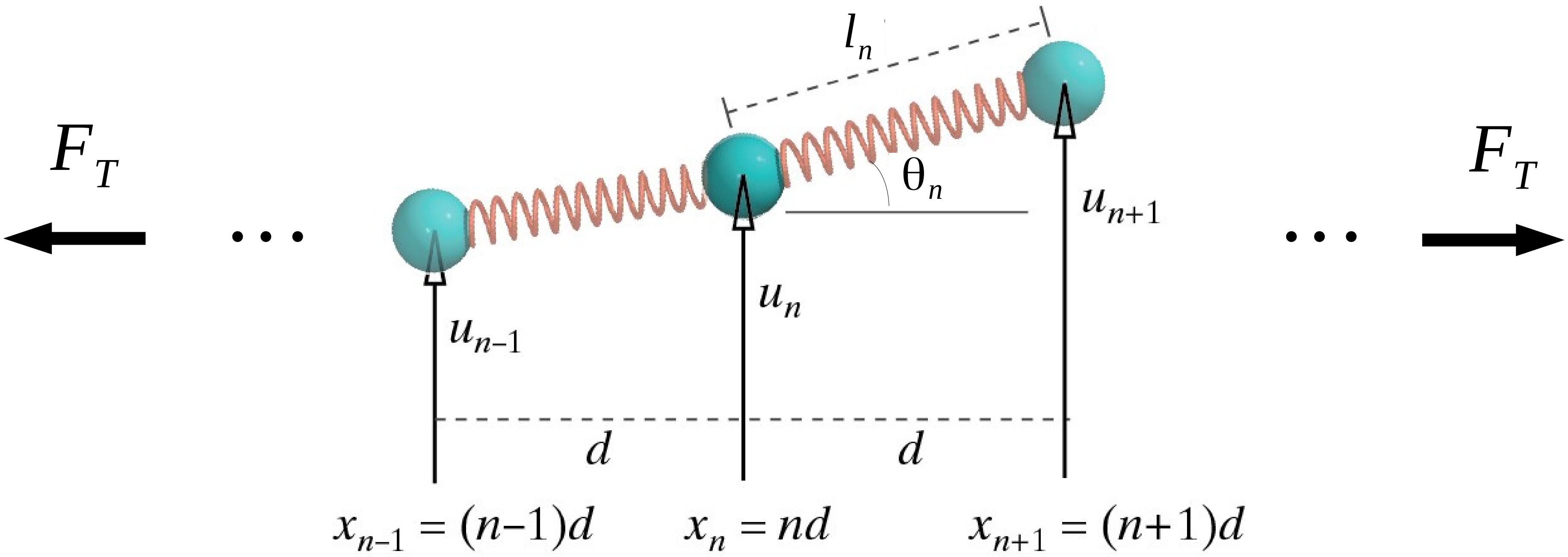


Hipótese de deslocamentos verticais e pequenos ângulos:

$$\theta_n \ll 1 \text{ rad} \quad \Rightarrow \quad |u_{n+1} - u_n| \ll d\,, \quad F_T \simeq k_m (d - d_0)$$

$$\cos\theta_n \simeq 1, \qquad \operatorname{sen}\theta_n \simeq \operatorname{tg}\theta_n \simeq \theta_n$$

Modelo microscópico de uma corda



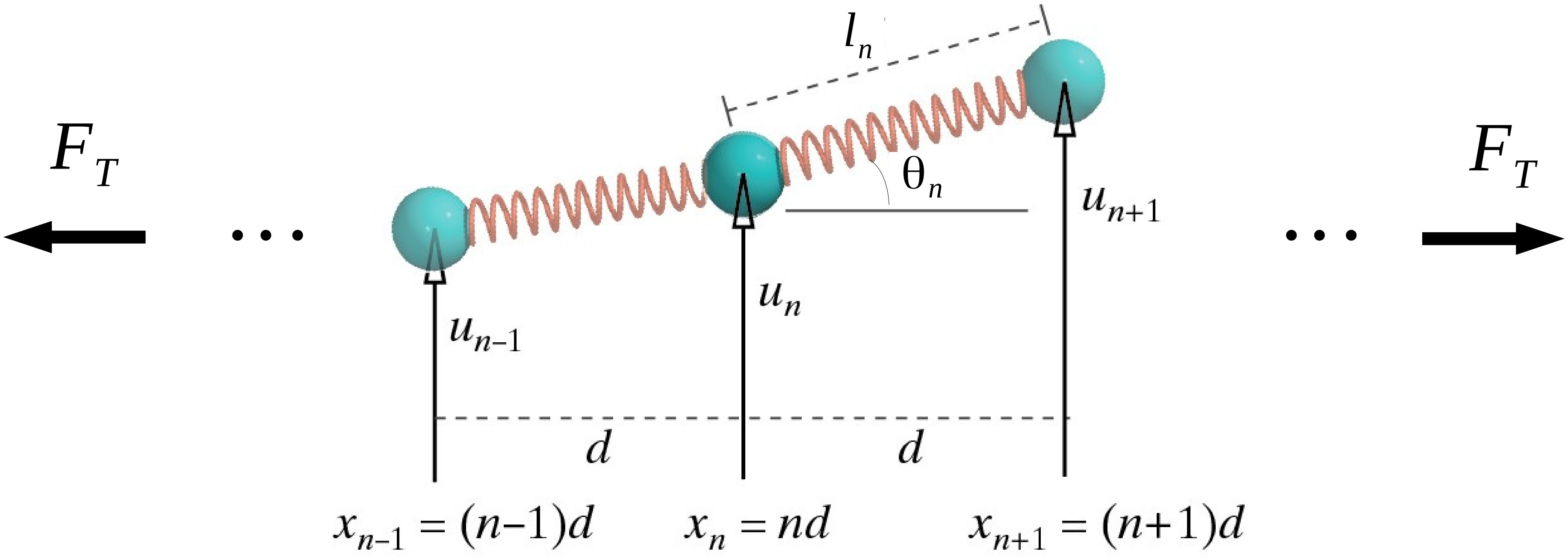
Hipótese de deslocamentos verticais e pequenos ângulos:

$$\theta_n \ll 1 \text{ rad} \quad \Rightarrow \quad |u_{n+1} - u_n| \ll d\,, \quad F_T \simeq k_m (d - d_0)$$

Componente horizontal da força resultante sobre a *n*-ésima esfera:

$$F_{n,\mathrm{h}} \simeq -F_T \cos\theta_{n-1} + F_T \cos\theta_n \simeq 0$$

Modelo microscópico de uma corda



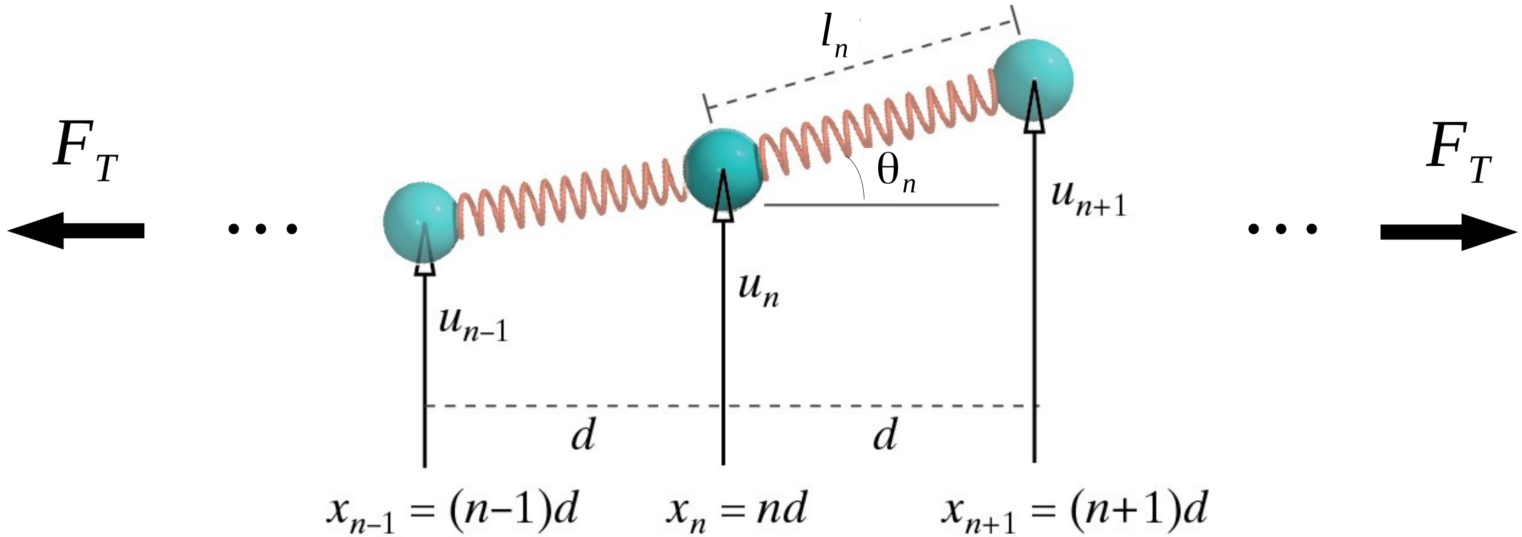
Hipótese de deslocamentos verticais e pequenos ângulos:

$$\theta_n \ll 1 \text{ rad} \quad \Rightarrow \quad |u_{n+1} - u_n| \ll d, \quad F_T \simeq k_m (d - d_0)$$

Componente vertical da força resultante sobre a *n*-ésima esfera:

$$F_{n,\mathrm{v}} \simeq -F_T \operatorname{sen} \theta_{n-1} + F_T \operatorname{sen} \theta_n \simeq F_T \left(-\frac{u_n - u_{n-1}}{d} + \frac{u_{n+1} - u_n}{d} \right)$$

Modelo microscópico de uma corda



Hipótese de deslocamentos verticais e pequenos ângulos:

$$\theta_n \ll 1 \ \text{rad} \quad \Rightarrow \quad |u_{n+1} - u_n| \ll d\,, \quad F_T \simeq k_m (d - d_0)$$

Componentes da força resultante sobre a *n*-ésima esfera:

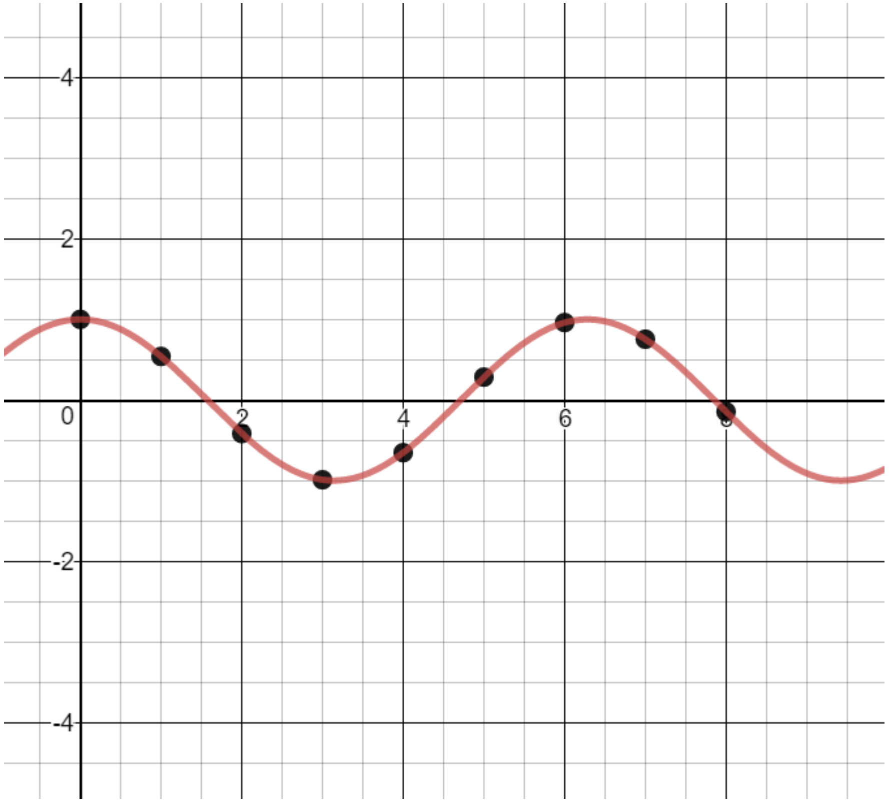
$$F_{n,\mathrm{h}} \simeq -F_T \cos\theta_{n-1} + F_T \cos\theta_n \simeq 0$$

$$F_{n,\mathrm{v}} \simeq -F_T \,\mathrm{sen}\,\theta_{n-1} + F_T \,\mathrm{sen}\,\theta_n \simeq F_T \left(-\frac{u_n - u_{n-1}}{d} + \frac{u_{n+1} - u_n}{d} \right)$$

Essas aproximações são razoáveis? Parte 1 no moodle.

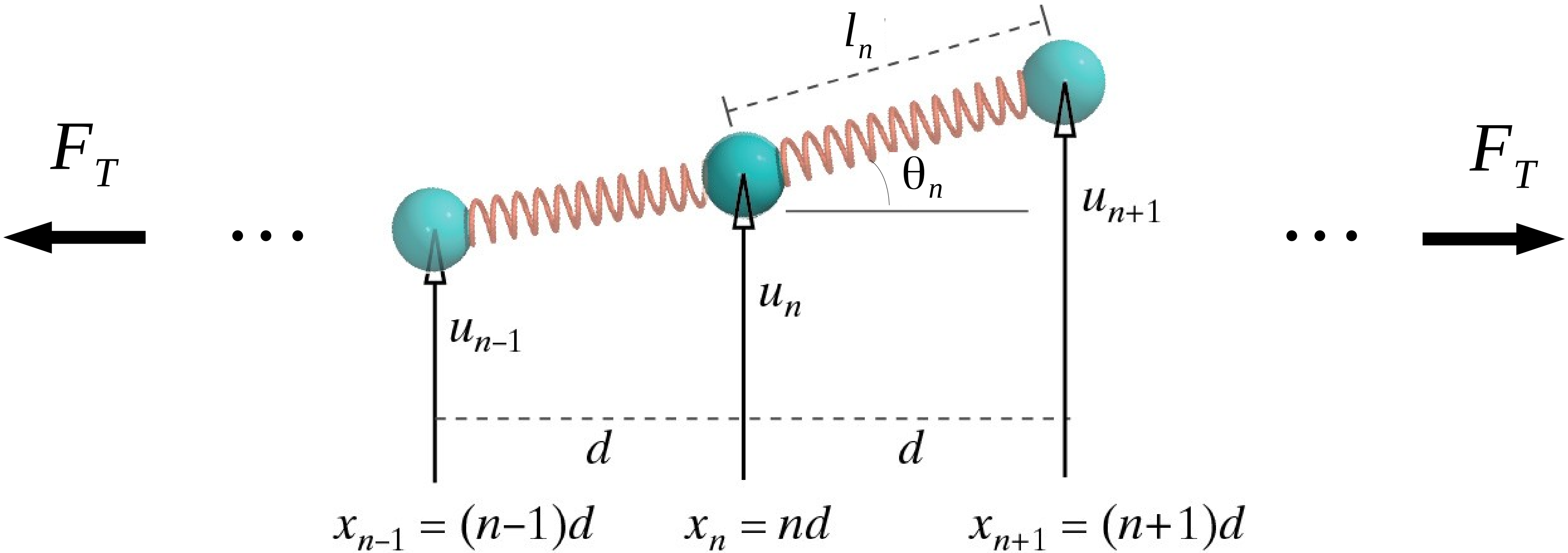
Função deslocamento

$u(x,t)$



x

Equação da onda



$$\left.\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)\right|_{x=x_n} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x} u(x,t)\right]\Bigg|_{x=x_n} \approx \frac{(u_{n+1}-u_n)-(u_n-u_{n-1})}{d^2}$$

Força (vertical) sobre a *n*-ésima esfera:

$$F_n = F_T\left(-\frac{u_n - u_{n-1}}{d} + \frac{u_{n+1}-u_n}{d}\right) \approx F_T\, d \left.\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)\right|_{x=x_n}$$

Equação da onda

$$F_n \approx F_T d \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) \Big|_{x=x_n}$$

Princípio do Momento (2ª. lei de Newton):

$$F_n = m \frac{d^2}{dt^2} u_n \approx m \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) \Big|_{x=x_n}$$

Finalmente (tratando x como variável contínua):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = \underbrace{\frac{m}{F_T d}}_{\frac{1}{v^2}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t)$$

$$\text{com } v = \sqrt{F_T \frac{d}{m}} = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

Que aproximações fizemos na dedução? Há limites de validade?

Equação da onda

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = \underbrace{\frac{m}{F_T d}}_{\frac{1}{v^2}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t)$$

$$\text{com } v = \sqrt{F_T \frac{d}{m}} = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

Notem a distinção entre v, a velocidade (constante) de propagação das ondas transversais, e a velocidade transversal dos segmentos da corda, que varia de segmento para segmento e é dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t).$$

Partes 2 e 3 no moodle