

Paramagneto, Ferromagneto e Transições de Fase

Estudo a partir da mecânica estatística

Mecânica Estatística
2014

Sistemas paramagnéticos

Sistemas ferromagnéticos

Transições de fase

Modelo de Ising

Sistema paramagnético

Paramagneto ou ferromagneto a temperaturas suficientemente altas

Pierre Curie (1905) :

$$M = C \frac{H}{T}$$

M Magnetização total

C Constante de Curie

T Temperatura

Susceptibilidade magnética:

$$\chi \equiv \left(\frac{\partial M}{\partial H} \right)_T = \frac{C}{T}$$

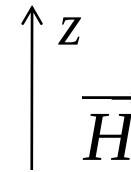
Sistema paramagnético

Microscopicamente, **Paul Langevin** (1905):

Dipolo magnético $\vec{\mu}$ na presença de um campo magnético $\vec{H}$



Energia de interação: $-\vec{\mu} \cdot \vec{H} = -\mu_z H$

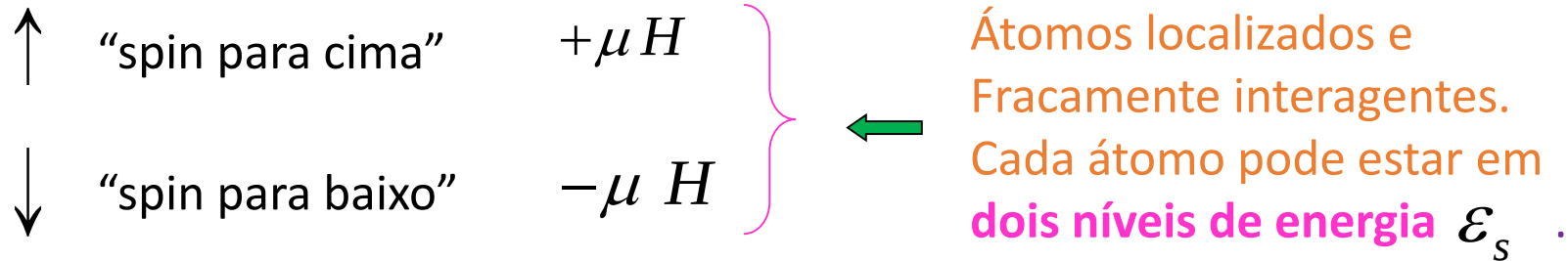


Brillouin: $\mu_z = -\mu$ ou $+\mu$

↑ “spin para cima” $-\mu H$
↓ “spin para baixo” μH

Átomos localizados e
fracamente interagentes.
Cada átomo pode estar
em dois níveis de energia.

Sistema paramagnético



Função de partição associada a um átomo

$$\zeta = \sum_{(\text{estados})} e^{-\beta \mathcal{E}_s} \quad \beta = 1/k_B T$$

$$\zeta = e^{-\beta (-\mu H)} + e^{-\beta (+\mu H)} = e^{\beta \mu H} + e^{-\beta \mu H}$$

$$\zeta = e^{\beta \mu H} + e^{-\beta \mu H}$$

Sistema paramagnético

Probabilidade de encontrar um dipolo com $\mu_z = +\mu$

$$P_+ = \frac{e^{\beta\mu H}}{e^{\beta\mu H} + e^{-\beta\mu H}}$$

Probabilidade de encontrar um dipolo com $\mu_z = -\mu$

$$P_- = \frac{e^{-\beta\mu H}}{e^{\beta\mu H} + e^{-\beta\mu H}}$$

Definição: **Magnetização por átomo**

$$m \equiv \langle \mu_z \rangle = \sum_s \mu_z \frac{e^{-\beta \epsilon_s}}{\zeta}$$

$$m = \langle \mu_z \rangle = \frac{(+\mu) e^{-\beta(-\mu H)} + (-\mu) e^{-\beta(+\mu H)}}{\zeta} = \frac{(+\mu) e^{-\beta(-\mu H)} + (-\mu) e^{-\beta(+\mu H)}}{e^{-\beta \mu H} + e^{-\beta \mu H}}$$

ou

$$m = \langle \mu_z \rangle = \mu \frac{e^{\beta \mu H} - e^{-\beta \mu H}}{e^{-\beta \mu H} + e^{\beta \mu H}}$$

Definição: ***m*** $\equiv m/\mu$ **Magnetização reduzida**

$$\mathbf{m} = \frac{\exp(\mu H / k_B T) - \exp(-\mu H / k_B T)}{\exp(\mu H / k_B T) + \exp(-\mu H / k_B T)} = \tanh \frac{\mu H}{k_B T}$$

*Equação de
Langevin-
Brillouin*

Magnetização

$$m = \mu \tanh\left(\frac{\mu H}{k_B T}\right)$$

Magnetização Total

$$M \equiv Nm$$

$$M \equiv Nm = N\mu \tanh\left(\frac{\mu H}{k_B T}\right)$$

Susceptibilidade magnética

$$\chi \equiv \frac{\partial M}{\partial H}$$

$$\begin{aligned} \chi = \frac{\partial M}{\partial H} &= N \mu^2 \beta \frac{e^{\beta \mu H} + e^{-\beta \mu H}}{e^{-\beta \mu H} + e^{\beta \mu H}} - \\ &- N \mu^2 \beta \frac{e^{\beta \mu H} - e^{-\beta \mu H}}{(e^{-\beta \mu H} + e^{\beta \mu H})^2} (-e^{-\beta \mu H} + e^{\beta \mu H}) \end{aligned}$$

$$\chi = N \mu^2 \beta \left[1 - \frac{\sinh^2 (\beta \mu H)}{\cosh^2 (\beta \mu H)} \right] = \frac{N \mu^2 \beta}{\cosh^2 (\beta \mu H)}$$

Magnetização no limite de altas temperaturas e campos fracos

$$m = \mu \tanh\left(\frac{\mu H}{k_B T}\right)$$

$$\beta \mu H \ll 1 \quad \longleftrightarrow \quad \mu H \ll k_B T$$

$$m = \mu \tanh(\beta \mu H) \approx \mu (\beta \mu H) = \mu \left(\frac{\mu H}{k_B T} \right)$$

$$\rightarrow m \approx \frac{\mu^2 H}{k_B T} \quad \text{e} \quad M = Nm \approx N\mu \frac{\mu H}{k_B T}$$

ou

$$\frac{M}{H} = \frac{C}{T} \quad \text{Lei de Curie}$$

Paramagneto

Magnetização

$$m = \mu \frac{\exp(\mu H / k_B T) - \exp(-\mu H / k_B T)}{\exp(\mu H / k_B T) + \exp(-\mu H / k_B T)} = \mu \tanh \frac{\mu H}{k_B T} \quad (\text{P1})$$

$$H = \mu H \quad m = m / \mu$$

$$m = \tanh \beta H$$

(P2) *Equação de
Langevin-Brillouin*

Susceptibilidade magnética

$$\chi = \frac{N \mu^2 \beta}{\cosh^2 (\beta \mu H)}$$

Suscetibilidade a campo nulo

$$\chi = \frac{N \mu^2 \beta}{\cosh^2 (\beta \mu H)}$$

Para $H = 0$:

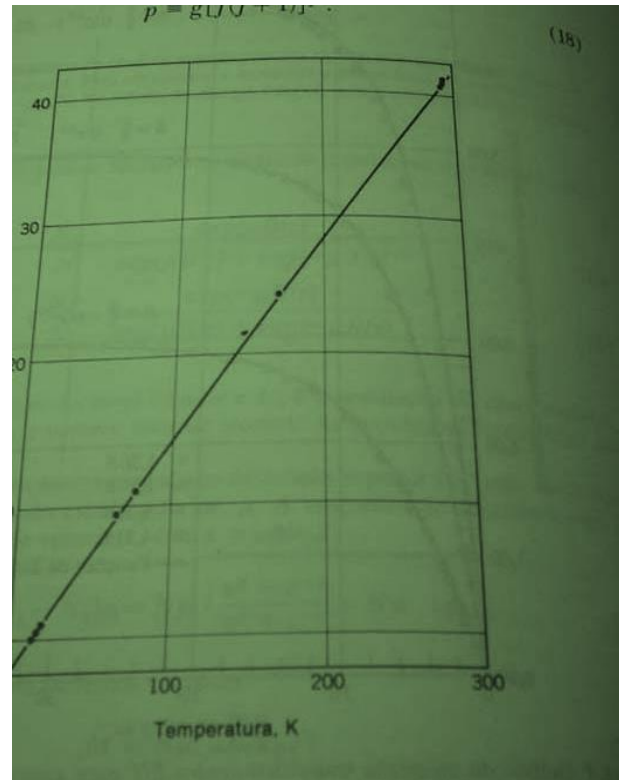
$$\chi_0 = \frac{N \mu^2}{k_B T} = \frac{C}{T} \quad \text{Lei de Curie}$$

em que $C = \text{const.}$

A campo nulo a susceptibilidade magnética é proporcional ao inverso da temperatura T .

$1/\chi$ versus a temperatura T para o **sal de gadolínio**.

$1/\chi$



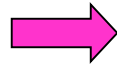
T

Resultados
experimentais

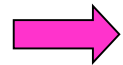
Linha cheia: **Lei de Curie**

Dados: Jackson & Karmeling Onnes, Leiden Comm., (C. Kittel, Introdução à Física do Estado Sólido, Guanabara Dois, 1978, p. 430)

Ferromagneto simples



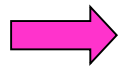
Magnetização espontânea



Tratamento fenomenológico:

Teoria de Curie-Weiss (1907)

e outras Aproximações de Campo Médio.



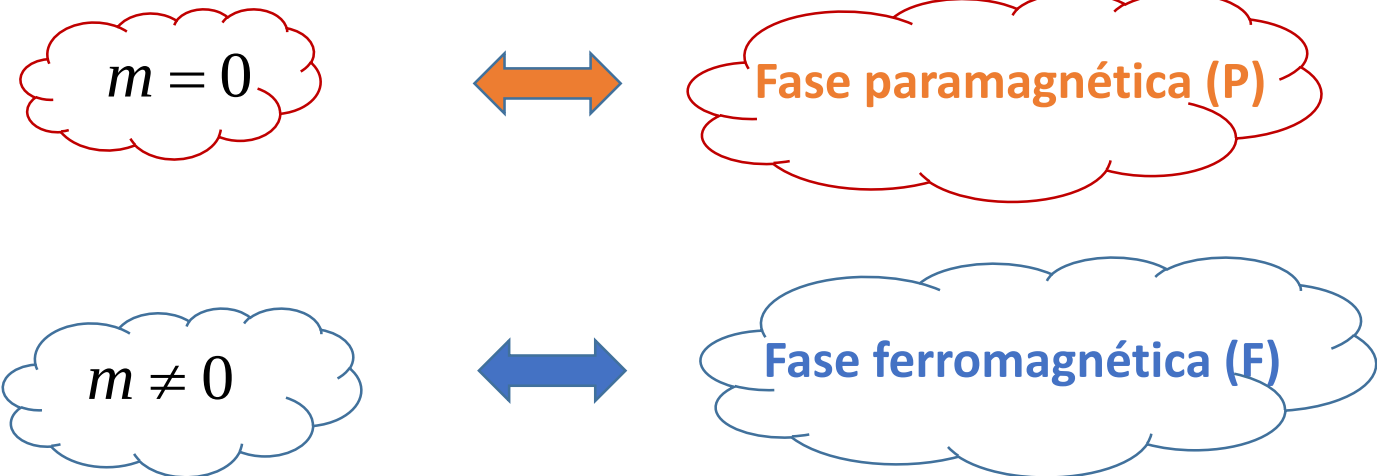
Modelo estatístico mais simples:

Modelo de Ising

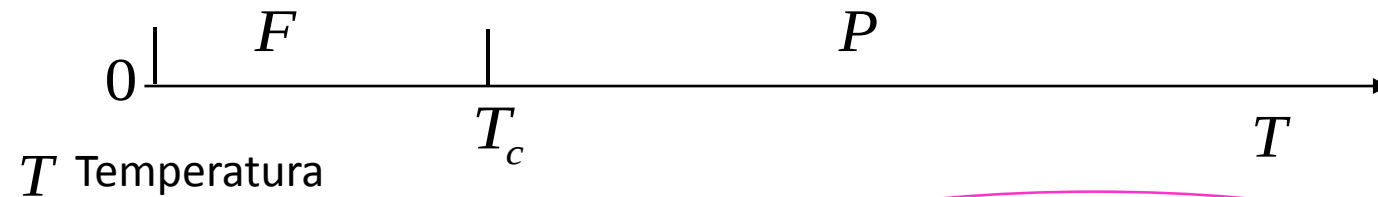
Ferromagneto simples

- Sistemas de spins interagentes.
- O sistema pode estar **ordenado** na **fase ferromagnética** ou **desordenado** (**fase paramagnética**).

- Parâmetro de ordem: m = magnetização.



Esboço do diagrama de fase de um ferromagneto a campo nulo



T Temperatura

F Fase ferromagnética

P Fase paramagnética

T_c

Temperatura crítica



Parâmetro ordem: magnetização espontânea m



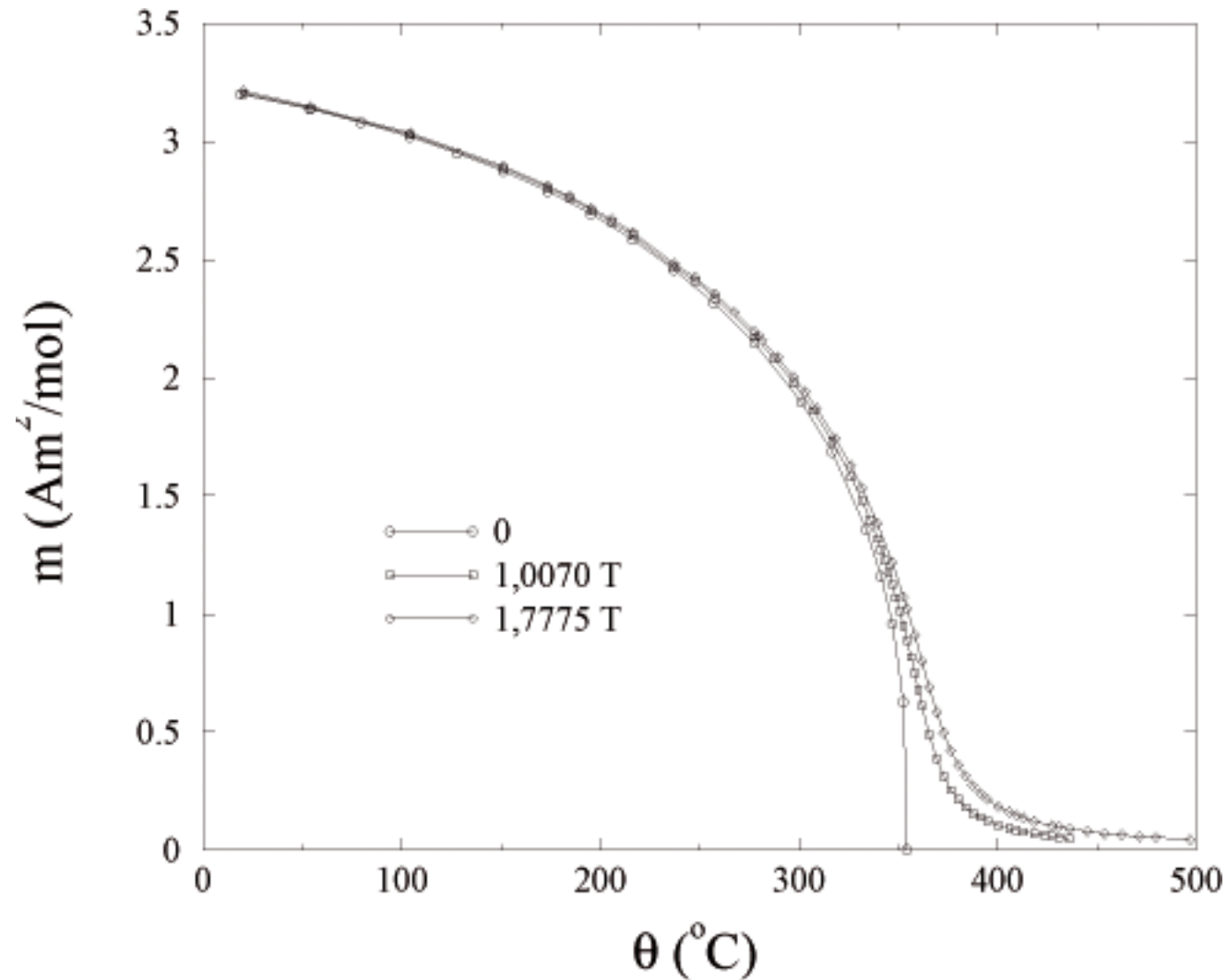
Para temperaturas **acima da temperatura crítica** o sistema se encontra no estado **paramagnético (P) , (desordenado)**.

$$m = 0 \quad \text{para} \quad T > T_c$$

Para temperaturas **abaixo da temperatura crítica** o sistema se encontra no estado **ferromagnético (F) , (ordenado)**:

$$m \neq 0 \quad \text{para} \quad T < T_c$$

Dados experimentais - Níquel

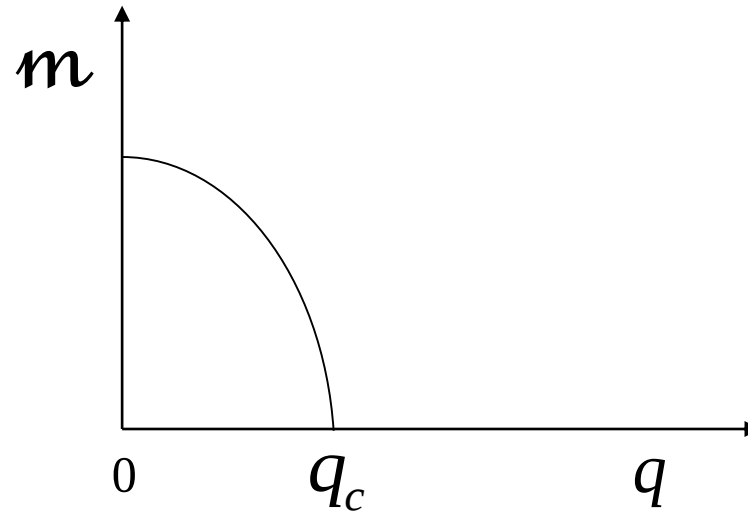


Magnetização m versus temperatura θ para diferentes valores do campo magnético aplicado

Transições de fases contínuas (ou transições de fase de segunda ordem)

Parâmetro de ordem: m

Parâmetro de controle: q



Nas vizinhanças da criticalidade (q próximo do seu valor crítico q_c)

$$m \sim |\varepsilon|^\beta$$

$$\varepsilon = q - q_c$$

β : Expoente crítico associado ao parâmetro de ordem

Exemplos de transições de fase de segunda ordem

ferromagnética – paramagnética em um ferromagneto

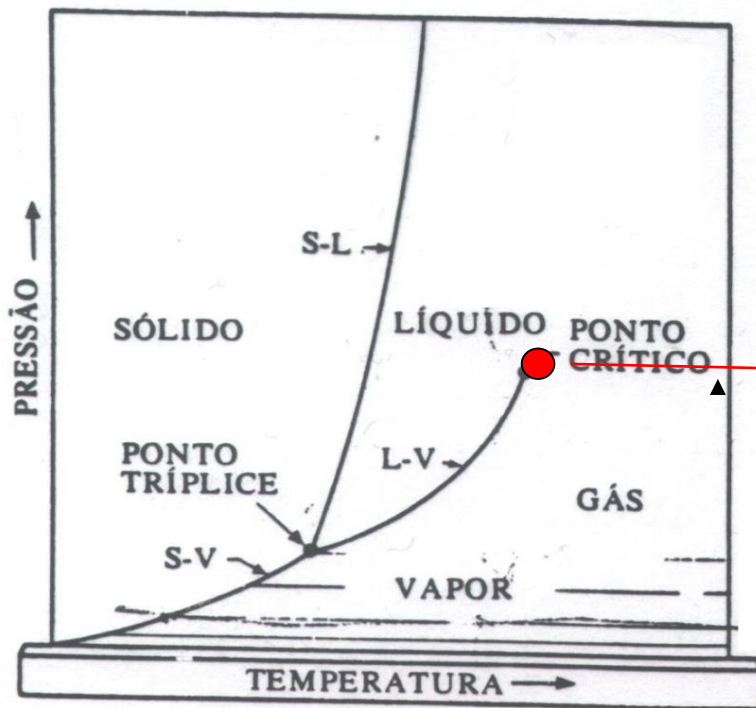
magnetização espontânea m

liquido– vapor em um substância simples

$$\psi = V_G - V_L$$

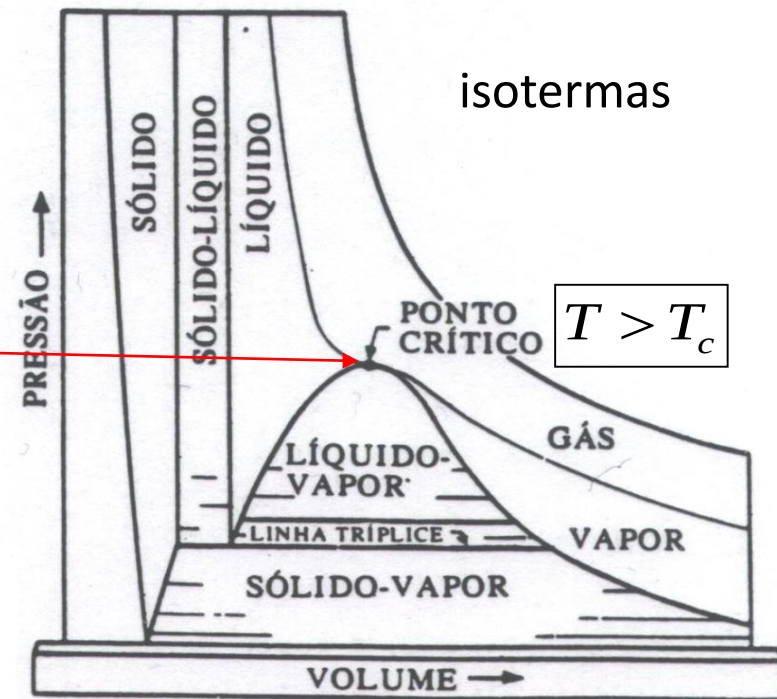
Substância simples: planos T-p e V-p

Plano T-p



(a)

Plano v-p



(b)

$$T > T_c$$

$$T = T_c$$

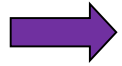
$$T < T_c$$

Sears&Salinger Termodinâmica,
Teoria cinética e Termodinâmica Estatística

Teoria de Curie-Weiss - Uma aproximação de campo médio

- $m = \tanh(\beta H_{\text{efetivo}})$, $\beta = 1/k_B T$.
- Soluções: $m=0$ e $m \neq 0$
- Transição: T_c Temperatura crítica
- Expoente crítico: $\beta = 1/2$

Magnetização de um ferromagneto / Aproximação de campo médio

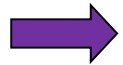


$$m = \tanh(\beta H_{\text{efetivo}}) \quad (1)$$

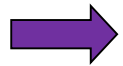
Hipótese de Weiss: esta equação descreve a magnetização de um átomo sujeito a um campo efetivo.

Esta equação é inspirada na equação (P2) para a magnetização de um paramagneto, a equação de Langevin-Brillouin.

Substitui-se H da eq. (P2) por:



$$H_{\text{efetivo}} = H + H_{\text{médio}} = H + Jzm \quad (2)$$



H

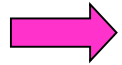
Campo magnético externo aplicado



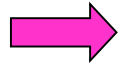
$Jzm = \lambda m$

Campo devido aos dipolos magnéticos vizinhos a um determinado dipolo magnético (Teoria de Weiss).

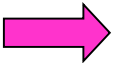
Magnetização espontânea



$$m = \tanh(\beta H_{\text{efetivo}}) \quad (3)$$



Para $\mathbf{H=0}$ (campo magnético externo nulo) temos,



$$m = \tanh(\beta J z m) \quad (4)$$

A equação (3) fornece uma **magnetização espontânea!**

$$m = \tanh(\beta J z m) \quad (4)$$

$m = 0$ é sempre solução dessa equação.

Entretanto, dependendo da temperatura podemos ter outras soluções!

Vamos definir x tal que:

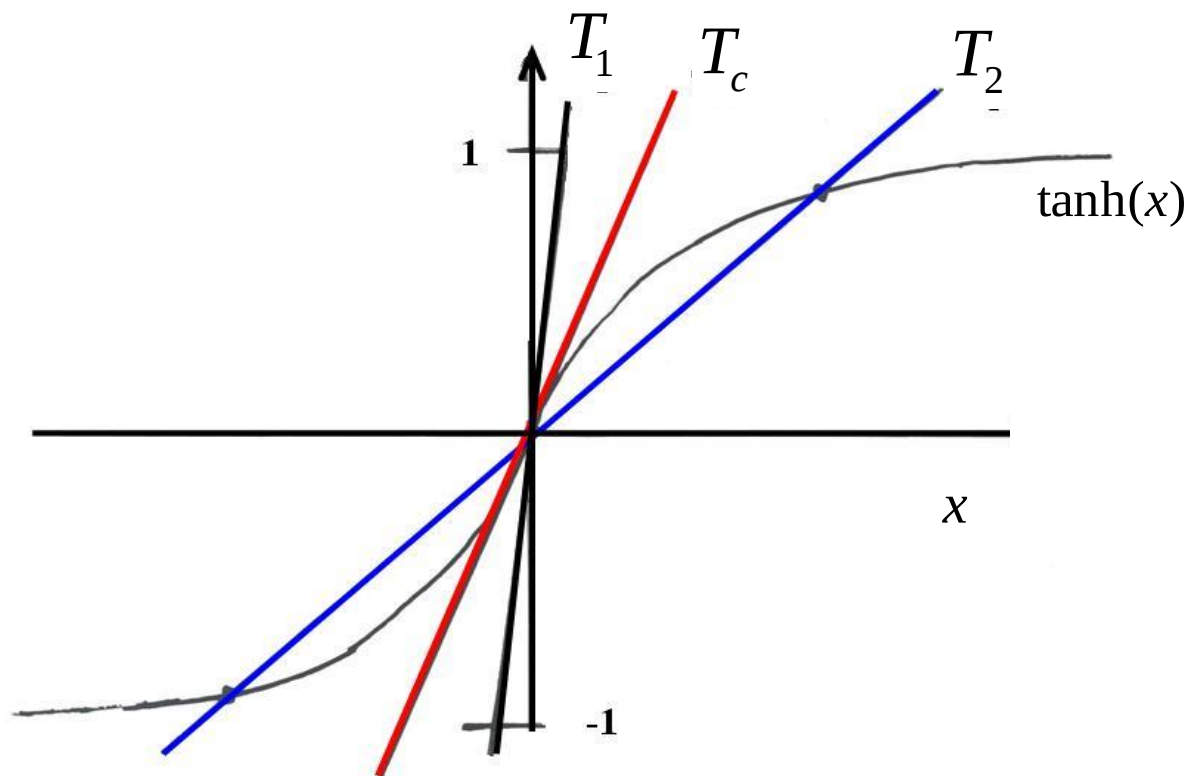
$$x = \beta J m z \quad (5)$$


E reescrever a equação para a magnetização:

$$\frac{x k_B T}{J z} = \tanh(x) \quad (6)$$


No próximo slide estão esquematizadas as soluções gráficas desta equação.

$$\frac{K_B T}{Jz} x = \tanh(x) \quad (7)$$



$$T_2 < T_c$$

$$T_1 > T_c$$

Figura 3

Se $\beta Jz > 1$ ou seja (**linha azul** no gráfico da Fig. 3)

$$\frac{k_B T}{Jz} < 1 \quad \text{então}$$

a **reta** $x \frac{k_B T}{Jz}$ encontra a **curva** $\tanh(x)$ para: $\pm x^* \neq 0$

ou equivalentemente:

$$\pm m^* \neq 0$$



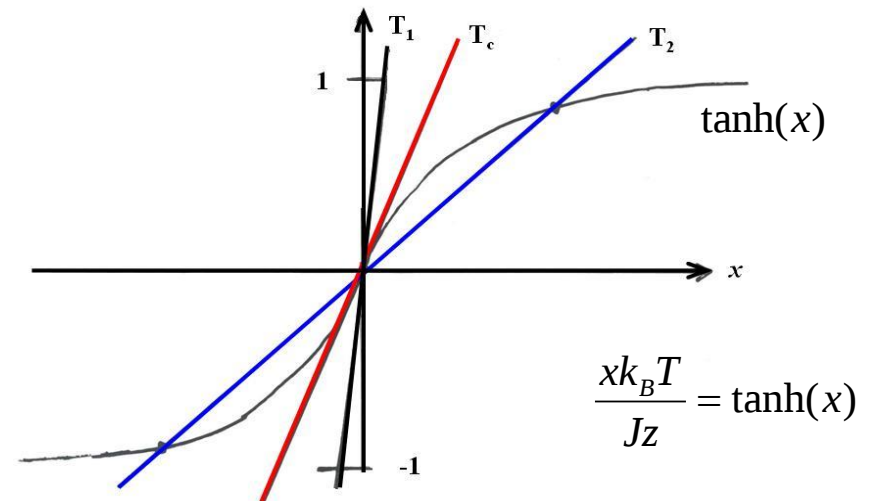
para temperaturas baixas, há **duas soluções iguais em módulo!!**

Temperatura crítica

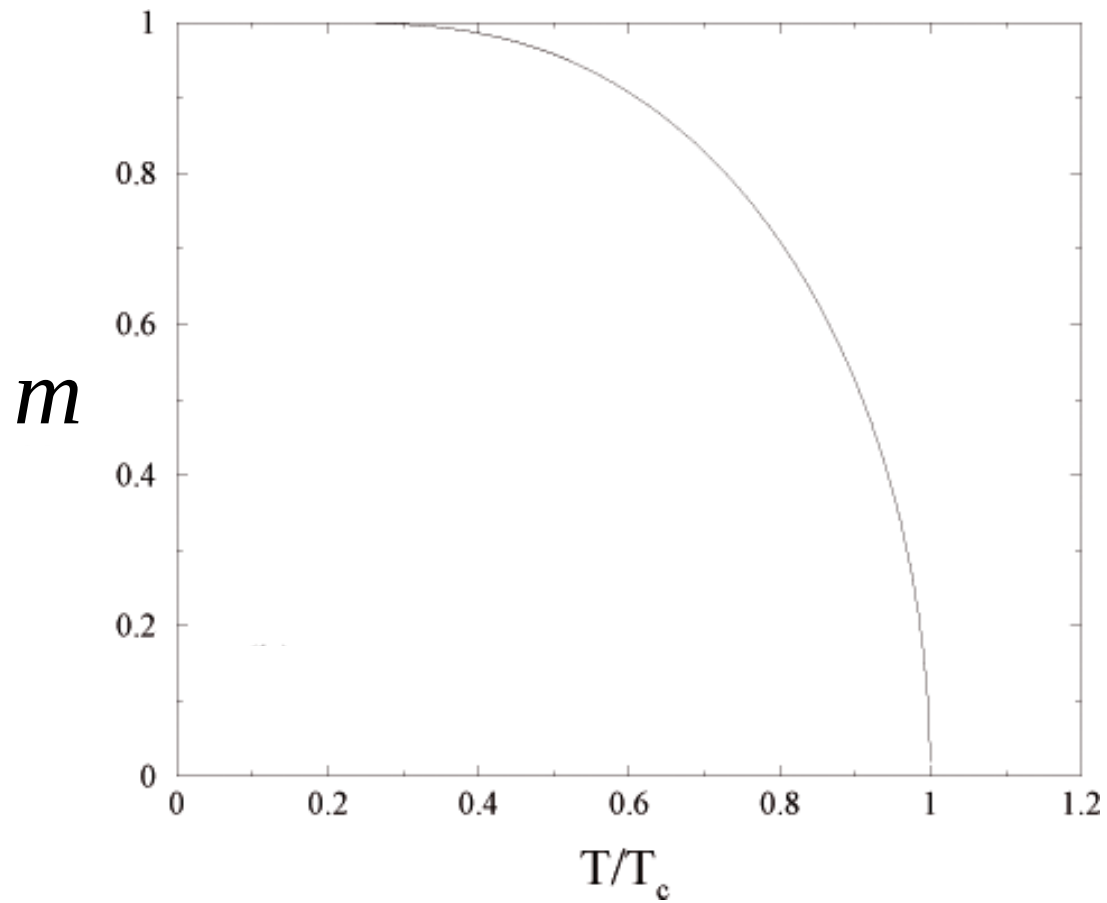
A temperatura crítica, onde se dá a transição de uma fase ferromagnética para a fase paramagnética, $m = 0$, é dada por:


$$\frac{k_B T_c}{Jz} = 1 \quad (8)$$

 **Linha vermelha** no gráfico



Magnetização versus temperatura - Teoria de Curie-Weiss



(H = 0)

Transições de Fase *Mecânica Estatística* *2014*

Segunda aula



Expoentes críticos

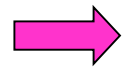


Modelo de Ising

Expansão ao redor do ponto crítico

Para $T < T_c$ mas próximo de T_c temos:

$$m \ll 1$$



Podemos expandir a equação (4) $m = \tanh(\beta J z m)$ (4)
retendo termos até ordem de m^3 :

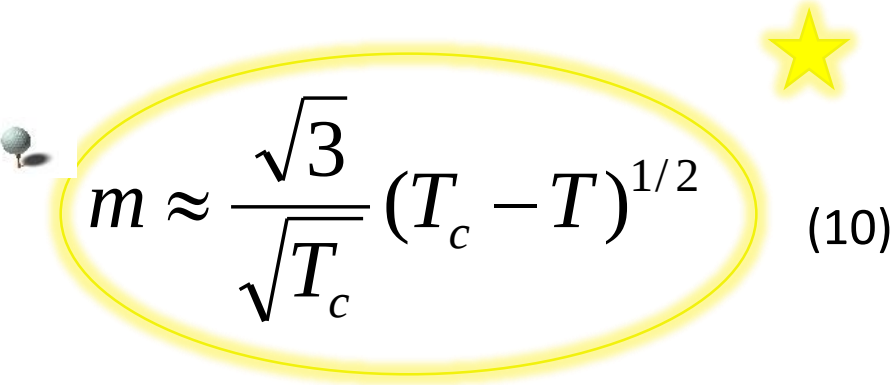
$$m \cong \beta J z m - \frac{1}{3} (\beta J z m)^3 \quad (9)$$

Comportamento da magnetização nas vizinhanças do ponto crítico

$$m \cong \beta J z m - \frac{1}{3} (\beta J z m)^3 \quad (9)$$

Para $m \neq 0$ e lembrando que $k_B T_c = Jz$ temos:

$$m^2 \approx 3 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)$$


$$m \approx \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{T_c}} (T_c - T)^{1/2} \quad (10)$$

Comportamento assintótico da magnetização <-> comportamento nas vizinhanças do ponto crítico

$$m \approx (T_c - T)^\beta \quad (11)$$

β



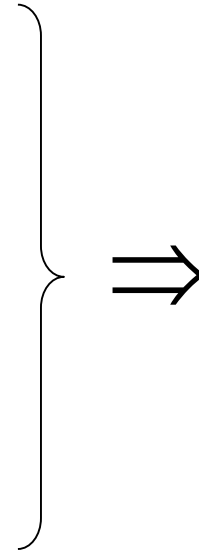
expoente crítico associado ao **parâmetro de ordem**
→ magnetização m

Expoente crítico associado à magnetização


$$m \approx \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{T_c}} (T_c - T)^{1/2} \quad (10)$$

Mas:


$$m \approx (T_c - T)^\beta \quad (11)$$



$$\beta = 1/2$$

Atenção: o valor do expoente crítico β foi aqui obtido utilizando a teoria de Curie-Weiss (teoria de campo médio).

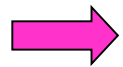


Expoente crítico associado à magnetização (parâmetro de ordem)

Susceptibilidade magnética: $\chi \equiv \frac{\partial m}{\partial H}$

$$m = \tanh(\beta Jm + \beta H) \quad (3)$$

Invertendo a relação dada na equação (3):

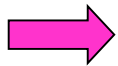


$$\tanh^{-1} m = \beta Jm + \beta H$$

$$\beta H = \tanh^{-1} m - \beta Jm$$

ou

$$H = k_B T \tanh^{-1} m - Jzm$$



$$H = \frac{k_B T}{2} \ln\left(\frac{1+m}{1-m}\right) - Jzm \quad (12)$$

Susceptibilidade magnética (continuação)

$$H = \frac{k_B T}{2} \ln\left(\frac{1+m}{1-m}\right) - Jzm \quad (12)$$

$$\chi \equiv \frac{\partial m}{\partial H} \quad \Rightarrow \quad \chi^{-1} = \frac{\partial H}{\partial m}$$

Perto da transição:

$$H \cong a(T - T_c)m + \frac{b}{3}m^3 \quad (13)$$

$$\chi^{-1} = \frac{\partial H}{\partial m} \cong a(T - T_c) + bm^2 \quad (14)$$

Perto da transição - Expansão próxima ao ponto crítico

$$H = \frac{k_B T}{2} [\ln(1+m) - \ln(1-m)] - Jzm \quad (12)$$

$$H \cong \frac{k_B T}{2} \left[\left(m - \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{3} \right) - \left(-m - \frac{m^2}{2} - \frac{m^3}{3} \right) \right] - Jzm$$

$$H \cong \frac{k_B T}{2} \left[2m + 2\frac{m^3}{3} \right] - Jzm \quad \text{ou} \quad H \cong (k_B T - Jz)m + \frac{k_B T}{3} m^3$$

$$\text{ou} \quad H \cong a(T - T_c)m + \frac{b}{3} m^3 \quad (13) \quad T_c = Jz / k_B$$

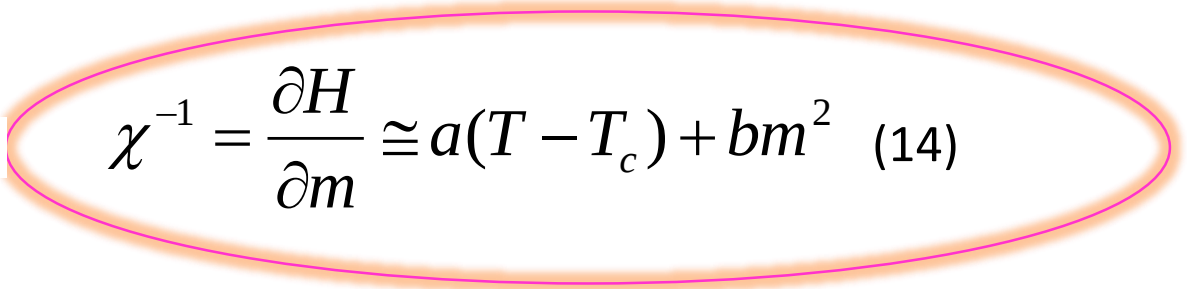
Se $H = 0$ então

$$m = 0 \quad \text{ou} \quad m^2 \cong \frac{3a}{b} (T_c - T)$$

Perto da transição - Expansão próxima ao ponto crítico

$$H \cong a(T - T_c)m + \frac{b}{3}m^3 \quad (13)$$

Portanto:


$$\chi^{-1} = \frac{\partial H}{\partial m} \cong a(T - T_c) + bm^2 \quad (14)$$

Susceptibilidade magnética: comportamento nas proximidades do ponto crítico

Perto da transição temos (a partir da Eq. (14):

$$\chi = \frac{\partial m}{\partial H} = \frac{1}{a(T - T_c) + b m^2} \quad (15)$$

📍 Para $T < T_c$ (mas T próxima de T_c)

$$m^2 \cong \frac{3a}{b}(T_c - T) \quad \text{e temos:}$$

$$\chi = \frac{\partial m}{\partial H} = \frac{1}{2a} \frac{1}{(T_c - T)} \quad (16)$$

📍 Para $T > T_c$

$$m = 0$$

e temos:

$$\chi = \frac{\partial m}{\partial H} = \frac{1}{a} \frac{1}{(T - T_c)} \quad (17)$$

Comportamento da magnetização nas vizinhanças do ponto crítico

$$\text{Susceptibilidade magnética } \chi \equiv \frac{\partial m}{\partial H}$$

Portanto na **aproximação de campo médio** e na **região próxima ao ponto crítico** temos:


$$\chi \approx |T - T_c|^{-1} \quad (18)$$

Comportamento assintótico da susceptibilidade $\leftrightarrow$ comportamento nas vizinhanças do ponto crítico


$$\chi \approx |T_c - T|^{-\gamma} \quad (19)$$

γ



expoente crítico associado à susceptibilidade χ

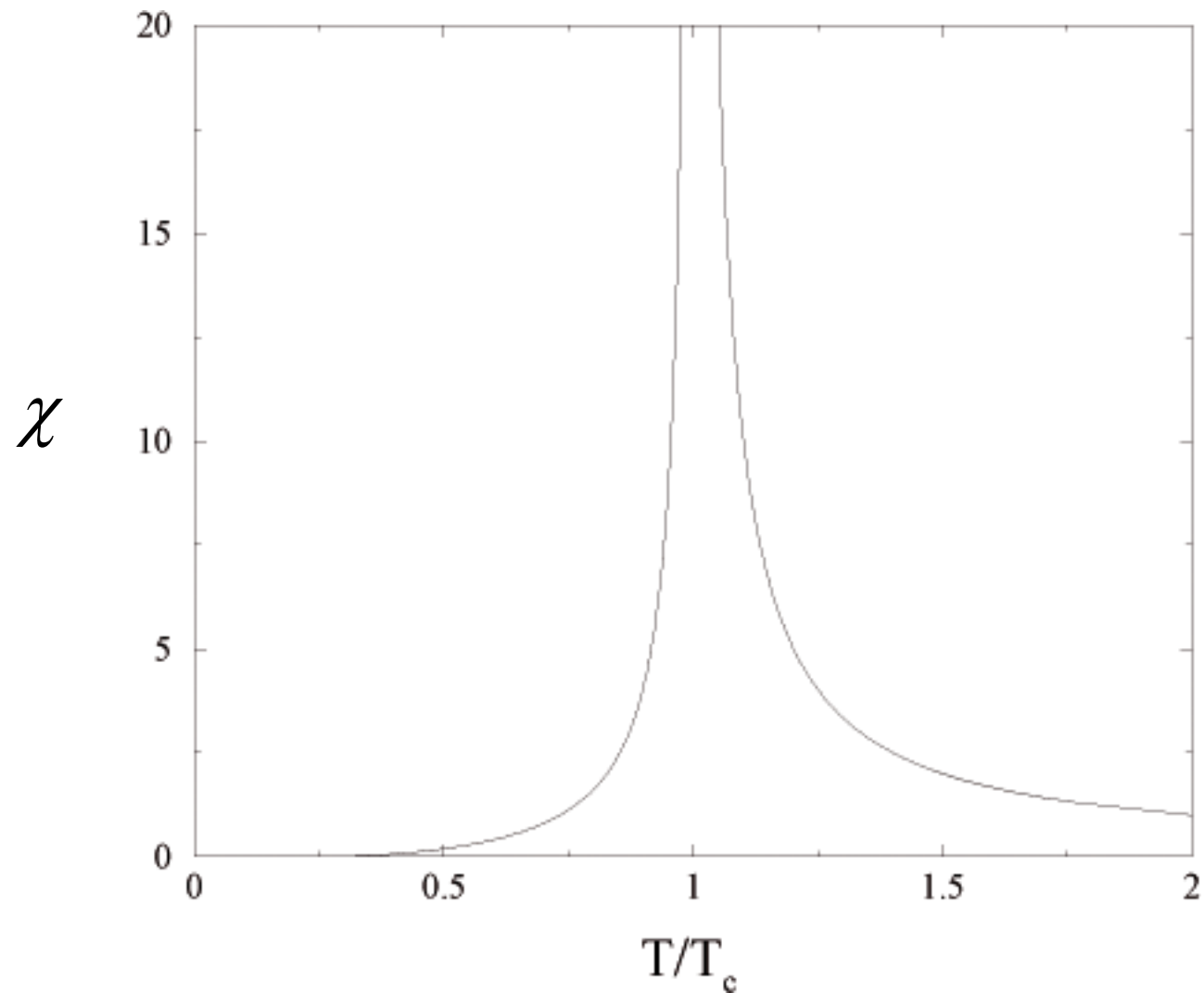
Expoente crítico associado à susceptibilidade magnética χ

$$\chi \approx |T - T_c|^{-1} \quad (18)$$

$$\chi \approx |T - T_c|^{-\gamma} \quad (19)$$

χ diverge no ponto crítico
com $\gamma = 1$

Susceptibilidade versus temperatura Curie-Weiss (aproximação de campo médio)



Fim das análises de campo médio (teoria de Curie-Weiss)

*Modelo de Ising – Modelo microscópico
Ferromagneto
Transições de fase*

Modelo de Ising

- Consideramos uma rede de sítios. Em **cada sítio** existe um **átomo magnético**.
- O **estado do átomo** é caracterizado pelo **momento de dipolo magnético**
- No **modelo de Ising** o **momento de dipolo** pode ser encontrando em **apenas dois estados** com relação a um certo eixo z : no **sentido de z** , ou no sentido **oposto a z** .
- O **momento de dipolo do i -ésimo** átomo é dado por:

$$\mu_i = \mu \sigma_i$$



em que $\mu = \text{const.}$ e a variável σ_i assume os valores:

- **+1** se o momento de dipolo apontar no sentido z ;
- **-1** se o momento de dipolo apontar no sentido $-z$.

A purple bracket on the left groups the two states (+1 and -1). A purple arrow points from the right side of this bracket to an oval containing the equation sigma_i = +/- 1.
$$\sigma_i = \pm 1$$

Modelo de Ising


$$-J\sigma_i\sigma_j$$

Representa a energia de interação entre **um par de sítios vizinhos (i, j)** na rede.

$$J = \text{const.}$$



$J > 0 \rightarrow$ ordenamento ferromagnético.

Modelo de Ising – Energia de interação de um par de sítios vizinhos (i, j)

$$-J\sigma_i\sigma_j$$

• Se $\sigma_i = +1$ e $\sigma_j = +1$ então $-J(+1)(+1) = -J < 0$

• Se $\sigma_i = -1$ e $\sigma_j = -1$ então $-J(-1)(-1) = -J < 0$

Ordenamento **paralelo** dos momentos de dipolo magnético



Favorece o **ordenamento ferromagnético**

Modelo de Ising – Energia de interação de um par de sítios vizinhos (i, j)

$$-J\sigma_i\sigma_j$$

• Se $\sigma_i = +1$ e $\sigma_j = -1$ então $-J(+1)(-1) = +J > 0$

• Se $\sigma_i = -1$ e $\sigma_j = +1$ então $-J(-1)(+1) = +J > 0$

momentos de dipolo magnético **antiparalelos**



Modelo de Ising



Energia total de uma configuração microscópica

$$E(\sigma) = -J \sum_{(ij)} \sigma_i \sigma_j - H \sum_i \sigma_i$$

Configuração microscópica: $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_N)$

$\sigma_i = \pm 1$ variável de spin associada ao sítio i da rede $i = 1, 2, 3, \dots, N$

H constante proporcional ao campo magnético externo.

$\sum_{(ij)} \dots$ soma sobre os pares de **sítios vizinhos** na rede.

Modelo de Ising



Se $H = 0$:

Energia de uma configuração microscópica σ :

$$E(\sigma) = -J \sum_{(ij)} \sigma_i \sigma_j$$

$\sigma_i = \pm 1$ variável de spin associada ao sítio i da rede

$i = 1, 2, 3, \dots, N$ sítios de uma rede *d-dimensional*

Distribuição de probabilidades canônica associada ao modelo de Ising



$$P(\sigma) = \frac{1}{Z} e^{-\beta E(\sigma)}$$

Probabilidade de encontrar o sistema na configuração σ

$$\beta = \frac{1}{k_B T}$$

k_B constante de Boltzmann



$$Z = \sum_{\sigma} e^{-\beta E(\sigma)}$$

função de partição

$\sum_{\sigma} (\dots)$ soma sobre todas as 2^N configurações

Propriedades macroscópicas do sistema em equilíbrio termodinâmico

Valor médio de uma função de estado $F(\sigma)$

$$\langle F \rangle = \sum_{\sigma} F(\sigma) P(\sigma) = \sum_{\sigma} F(\sigma) \frac{1}{Z} e^{-\beta E(\sigma)}$$

Magnetização média


$$m = \frac{1}{N} \langle \sum_i \sigma_i \rangle$$

Propriedades macroscópicas do sistema em equilíbrio termodinâmico

Susceptibilidade magnética


$$\chi = \frac{1}{N} \left\{ \left\langle \left(\sum_i \sigma_i \right)^2 \right\rangle - \left\langle \left(\sum_i \sigma_i \right) \right\rangle^2 \right\}$$

Energia média por sítio

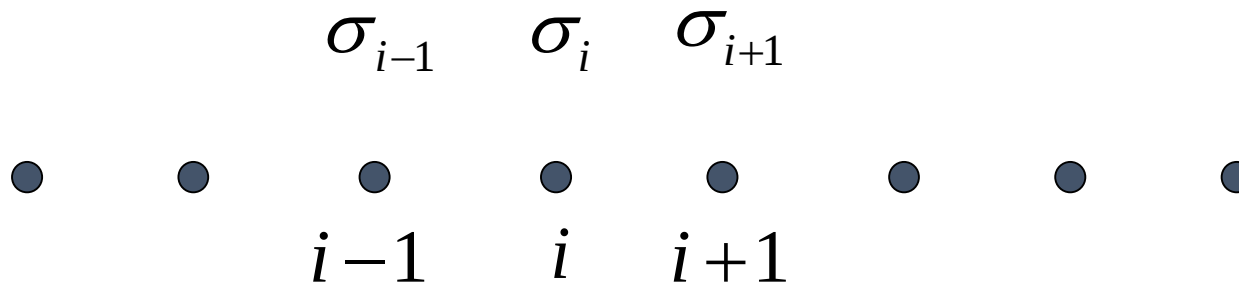

$$u = \frac{1}{N} \langle E \rangle$$

Variância da energia por sítio


$$c = \frac{1}{N} \left\{ \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 \right\}$$

Modelo de Ising unidimensional

N spins interagentes em uma **cadeia linear**:



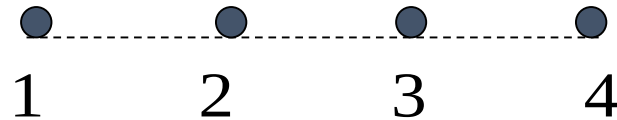
Energia da configuração σ a campo nulo $H = 0$

$$E(\sigma) = -J \{ \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \dots + \sigma_{i-1} \sigma_i + \sigma_i \sigma_{i+1} + \dots \}$$

$$\sigma_i = \pm 1$$

Modelo de Ising unidimensional

Exemplo: **N= 4** spins interagentes em uma cadeia linear:



Configuração microscópica: $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ $\sigma_i = \pm 1$

Possíveis configurações microscópicas: 2^4

Exemplos:

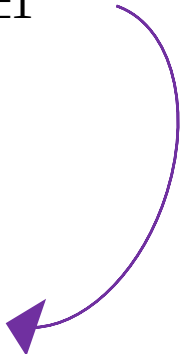
σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
+1	+1	+1	+1
+1	+1	+1	-1
+1	+1	-1	-1
+1	-1	+1	-1
+1	-1	-1	-1

Modelo de Ising unidimensional

Função de partição

$$Z = \sum_{\sigma_1} \sum_{\sigma_2} \sum_{\sigma_i} \sum_{\sigma_N} \exp(\beta J(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \dots + \sigma_{N-1}\sigma_N))$$

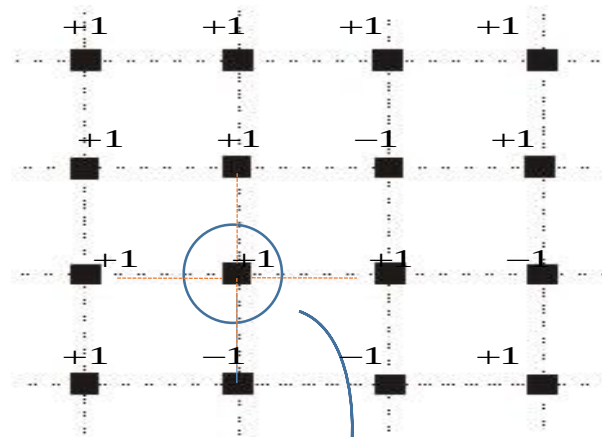
Ou seja:

$$Z = \sum_{\sigma_1=\pm 1} \sum_{\sigma_2=\pm 1} \dots \sum_{\sigma_N=\pm 1} e^{\beta J[\sigma_1\sigma_2 + \dots + \sigma_i\sigma_{i+1} + \dots]}$$


Pode-se obter uma expressão para Z para o modelo de Ising unidimensional. Entretanto, verifica-se que o modelo de Ising unidimensional não exibe transição de fase (**vamos obter a solução na próxima aula**).

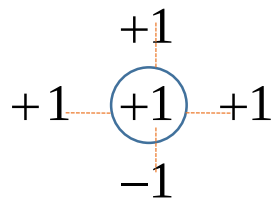
Modelo de Ising bidimensional

N spins interagentes em uma rede quadrada regular (por exemplo):



$$\sigma_i = \pm 1$$

Exemplo de uma configuração local: um sítio central no estado +1 e seus 4 primeiros vizinhos (três deles no estado +1 e um no estado -1):



Modelo de Ising bidimensional

$$Z = \sum_{\sigma} e^{\beta E(\sigma)} \quad E(\sigma) = -J \sum_{(i,j)} \sigma_i \sigma_j$$

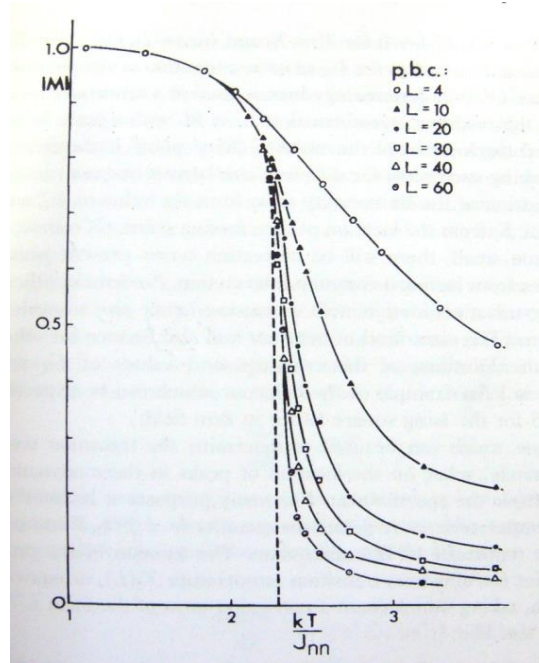


Solução de Onsager para **Ising bidimensional a campo nulo**.

Três dimensões -- > ainda não há solução exata!

*Magnetização $\langle |m| \rangle$ versus temperatura (kT/J , $J>0$)
para o modelo de Ising definido em uma rede quadrada de
tamanho $N=L \times L$. Simulações de Monte Carlo.*

Landau &
Binder
(2000)



$$k_B T_c / J \cong 2,26918$$

$$\langle M \rangle \approx (T - T_c)^\beta$$

(Nas proximidades do ponto crítico)

*As curvas correspondem à
redes quadradas regulares
de diferentes tamanhos $L \times L$*

$\langle |m| \rangle$ é o parâmetro de ordem para essa transição

$$\langle |m| \rangle \neq 0$$

Fase ferromagnética
ordenada

$$\langle |m| \rangle = 0$$

Fase paramagnética
desordenada

Tânia T M de Castro - 2014

$$(k_B T_c / J)^{-1} \cong 0,440687$$

$$(k_B T_c / J)^{-1} = \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2})$$

FIM