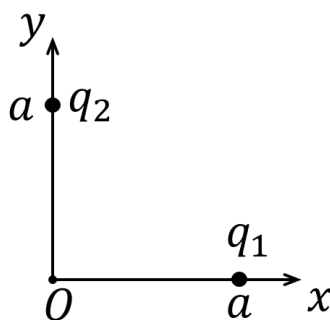


Física III-4323203
Escola Politécnica-2025
Prova P1-Gabarito

Questão 1

Considere um sistema formado por duas cargas elétricas puntiformes q_1 e q_2 . A carga $q_1 = +Q$ está localizada na posição $(x, y, z) = (a, 0, 0)$, enquanto a carga $q_2 = -Q$ está localizada na posição $(x, y, z) = (0, a, 0)$, onde $a > 0$. Expresse sua resposta em termos da carga Q , da distância a e de eventuais constantes físicas.



- (a) (1,0 ponto) Obtenha o vetor força resultante que atua na carga $q_1 = +Q$?
- (b) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo elétrico produzido pelas duas cargas na origem $(0, 0, 0)$
- (c) (0,5 ponto) Calcule o potencial elétrico produzido pelas duas cargas na origem do sistemas de coordenadas.

Solução da questão 1

(a) Sendo $\vec{r} = a\hat{i} - a\hat{j}$ e o fato de $q_1 = +Q$ e $q_2 = -Q$, temos que $\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r} \Rightarrow \vec{F}_1 =$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-Q^2}{(2\sqrt{2}a^3)} (a\hat{i} - a\hat{j}) \Rightarrow \boxed{\vec{F}_1 = \frac{Q^2(-\hat{i} + \hat{j})}{8\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^2}}$$

(b) Considerando que $\vec{r}_1 = -a\hat{i}$ é o vetor que liga a carga q_1 à origem do sistema de coordenadas e $\vec{r}_2 = -a\hat{j}$ é o vetor que liga a carga q_2 à origem do sistema de coordenadas, temos:

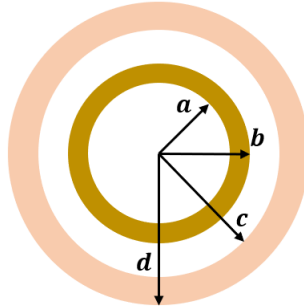
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \vec{r}_1}{r_1^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 \vec{r}_2}{r_2^3} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(+Q)(-a\hat{i})}{a^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-Q)(-a\hat{j})}{a^3} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-\hat{i} + \hat{j}}{a^2} \right]}$$

$$(c) V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2} \Rightarrow V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(+Q)}{a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-Q)}{a} \Rightarrow \boxed{V = 0}$$

Questão 2

Considere uma esfera oca condutora, de raio interno a e externo b , concêntrica a outra esfera oca condutora, de raio interno c e raio externo d , respectivamente. As esferas ocas interna e externa possuem cargas elétricas $+2Q$ e $+4Q$, respectivamente.

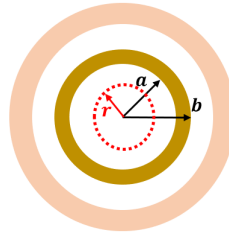


- (a) (1,0 ponto) Encontre o valor da carga elétrica nas superfícies de raios $r = a$, $r = b$, $r = c$ e $r = d$. Expresse sua resposta em termos de Q .
- (b) (1,0 ponto) Encontre o vetor campo elétrico $\vec{E}$ nas regiões $a < r < b$ e $b < r < c$;
- (c) (1,0 ponto) Encontre o vetor campo elétrico $\vec{E}$ nas regiões $c < r < d$ e $r > d$;
- (d) (1,0 ponto) Considere agora que o condutor interno possui carga total $+2Q$ e o condutor externo possui carga total $-2Q$. Nessa situação, qual é a diferença de potencial V entre os dois condutores?
- (e) (1,0 ponto) Nas condições do item (d), calcule a capacitância desse capacitor esférico.

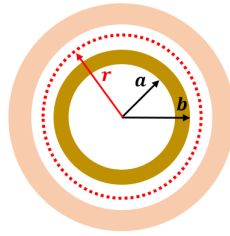
Solução - Questão 2

Tendo em vista a distribuição esférica, o vetor campo elétrico possui simetria radial $\vec{E} = E(r)\hat{r}$. Dessa forma, usando a lei de Gauss considerando uma superfície gaussiana esférica de raio r , temos que o fluxo elétrico é dado por $\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = E \cdot 4\pi r^2 = Q_{int}/\epsilon_0$.

a) Uma vez qualquer excesso de carga deve estar sob a superfície de um material condutor e $Q_{int} = 0$ para $r < a$ (ver figura abaixo), temos que $q(r = a) = 0$ e portanto $q(r = b) = 2Q$. Usando um argumento similar e tendo em vista que $\vec{E}(c < r < d) = 0$, tem-se que $q(r = c) = -2Q$. Uma vez que a carga total da esfera condutora externa vale $+4Q$ e $q(r = c) = -2Q$, tem-se $q(r = d) = 6Q$.



(b) Usando a lei de Gauss, com superfície gaussiana de raio r [entre $a < r < b$ (figura abaixo) e $b < r < c$ nas regiões $a < r < b$ e $b < r < c$, respectivamente], temos que $E \cdot 4\pi r^2 = Q_{int}/\epsilon_0$, onde $Q_{int} = 0$ e $+2Q$ para $a < r < b$ e $b < r < c$, respectivamente. Portanto, $\vec{E} = 0$ e $\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$ para $a < r < b$ e $b < r < c$, respectivamente.



(c) De forma análoga ao item anterior, $\vec{E} = 0$ para $c < r < d$. Tendo em vista que $Q_{int} = +6Q - 2Q + 2Q$ para $r > d$, obtemos $\vec{E} = \frac{3Q}{2\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$ para $r > d$.

(d) Uma vez que o campo elétrico no interior de um condutor em equilíbrio eletrostático é nulo, a superfície de raio $r = d$ tem carga elétrica nula e a superfície de raio $r = c$ estará carregada com carga $q(r = c) = -2Q$. O mesmo argumento vale para o condutor interno, de forma que $q(r = a) = 0$ e $q(r = b) = 2Q$. Note que o campo elétrico permanece nulo na região $a < r < b$

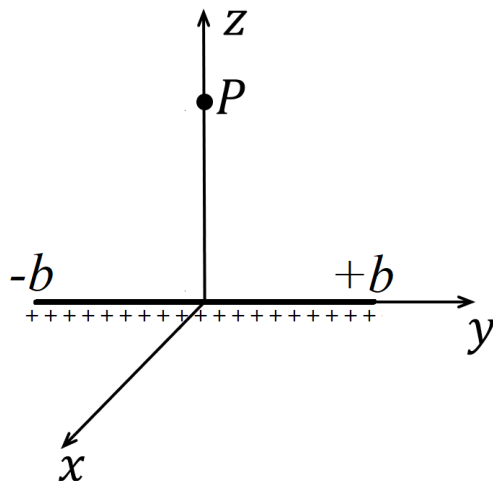
e $c < r < d$. Usando a lei de Gauss, o vetor campo elétrico $\vec{E}$ na região entre $r = b$ e $r = c$ é dado por $\vec{E} = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$. Dessa forma, a diferença de potencial entre $r = b$ e $r = c$ vale

$$V_{bc} = V_b - V_c = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 b} - \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 c} = \boxed{\frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \frac{c-b}{bc}}$$

(e) A capacitância $C = 2Q/V_{bc} = \boxed{4\pi\epsilon_0 \frac{cb}{c-b}}$.

Questão 3

Considere um fio retilíneo de comprimento $2b$, uniformemente carregado com carga positiva $+Q$ e situado sobre o eixo y , conforme ilustrado na figura abaixo.



- (a) (1,0 ponto) Calcule o potencial elétrico produzido pelo fio no ponto $P = (0, 0, z)$.
- (b) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo elétrico produzido pelo fio no ponto $P = (0, 0, z)$.
- (c) (0,5 ponto) Suponha agora uma carga pontual $+q$ no infinito. Qual é a energia necessessária para trazer a carga do infinito até a posição $P = (0, 0, z)$,

Solução da questão 3

- (a) A densidade de linear de carga no fio é $\lambda = Q/(2b)$. Logo, a carga elétrica dq contida em um trecho do fio de comprimento infinitesimal dy é:

$$dq = \lambda dy = \frac{Q}{2b} dy.$$

Logo o potencial elétrico, obtido pela distribuição de carga, tomado como referência um ponto infinitamente distante tendo potencial nulo na referência é dado por

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} \Rightarrow V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-b}^{+b} \frac{Qdy}{2b\sqrt{z^2 + y^2}} \Rightarrow V = \frac{Q}{8\pi b\epsilon_0} \int_{-b}^{+b} \frac{dy}{\sqrt{z^2 + y^2}} \Rightarrow$$

$$V = \frac{Q}{8\pi b\epsilon_0} \left[\ln(y + \sqrt{y^2 + z^2}) \right]_{-b}^{+b} \Rightarrow V = \frac{Q}{8\pi b\epsilon_0} \left[\ln(b + \sqrt{b^2 + z^2}) - \ln(-b + \sqrt{b^2 + z^2}) \right] \Rightarrow$$

$$V = \frac{Q}{8\pi b\epsilon_0} \ln \left(\frac{b + \sqrt{b^2 + z^2}}{-b + \sqrt{b^2 + z^2}} \right)$$

- (b) De forma análoga, o vetor campo elétrico $\vec{E}$ é obtido por meio da Lei de Coulomb e dado por

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{r}dq}{r^3} \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{8\pi b\epsilon_0} \int_{-b}^{+b} \frac{(-y\hat{j} + z\hat{k})dy}{(z^2 + y^2)^{3/2}} \Rightarrow$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{8\pi b\epsilon_0} \left[\int_{-b}^{+b} \frac{-y\hat{j}dy}{(z^2 + y^2)^{3/2}} + \int_{-b}^{+b} \frac{z\hat{k}dy}{(z^2 + y^2)^{3/2}} \right] \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{8\pi b\epsilon_0} \left[0 + \frac{2zb\hat{k}}{z^2\sqrt{z^2 + b^2}} \right] \Rightarrow$$

$$\vec{E} = \frac{Q\hat{k}}{4\pi\epsilon_0 z\sqrt{z^2 + b^2}}$$

Solução alternativa:

O vetor campo elétrico também pode ser encontrado a partir da seguinte expressão:

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k} \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q\hat{k}}{4\pi\epsilon_0 z\sqrt{z^2 + b^2}}$$

(c) A energia necessária para trazer a carga $+q$ do infinito até a posição $P = (0, 0, z)$ é:

$$U = Vq \Rightarrow \boxed{U = \frac{Qq}{8\pi b\epsilon_0} \ln \left(\frac{b + \sqrt{b^2 + z^2}}{-b + \sqrt{b^2 + z^2}} \right)}$$

Formulário

$$\vec{F} = \frac{qq'(\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad \vec{F} = q\vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{q(\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}')dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3},$$

$$p = qd, \quad \vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}, \quad U = -\vec{p} \cdot \vec{E}, \quad \Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0},$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V,$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}, \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}, \quad C = Q/V, \quad C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots,$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots, \quad U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}, \quad u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2,$$

$$dR = \rho \frac{d\ell}{A}, \quad R = \int dR, \quad V = RI, \quad \vec{J} = \sigma \vec{E} = \frac{1}{\rho} \vec{E},$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sqrt{x^2 + a^2}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}), \quad \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sqrt{x^2 + a^2}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}}, \quad \int \frac{xdx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$