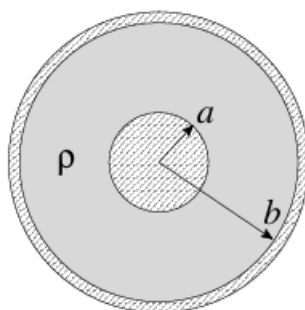


Física III-4323203
Escola Politécnica-2025
Prova P2-Gabarito

Questão 1

Considere um sistema formado por um condutor esférico de raio a e uma casca esférica condutora de raio b , sendo $a < b$. A região $a < r < b$ é preenchida com um material ôhmico de resistividade elétrica ρ . Além disso a esfera de raio a está em um potencial elétrico V_a enquanto a esfera de raio b está em um potencial elétrico V_b , sendo $V_a > V_b$.



- (a) (1,0 ponto) Calcule a resistência R entre os condutores de raio a e b .
- (b) (1,0 ponto) Calcule o vetor densidade de corrente volumétrica $\vec{J}(r)$ na região $a < r < b$.
- (c) (0,5 ponto) Calcule o vetor campo elétrico $\vec{E}(r)$ na região $a < r < b$.

Solução da questão 1

- (a) Temos que o elemento de resistência elétrica dR entre as esferas é dado por

$$dR = \frac{\rho dr}{A(r)}.$$

Dessa forma, efetuando a integração entre $r = a$ e $r = b$, temos

$$R = \int_a^b \frac{\rho dr}{4\pi r^2} = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

- (b) Sabendo que a corrente total fluindo radialmente entre as esferas em qualquer posição radial é igual a $I = (V_a - V_b)/R$, onde R foi obtido no item anterior, e que $I = \oint \vec{J} \cdot d\vec{A}$, sendo $\vec{J}(r) = J(r)\hat{r}$, obtemos $J(r) = I/4\pi r^2$ e portanto

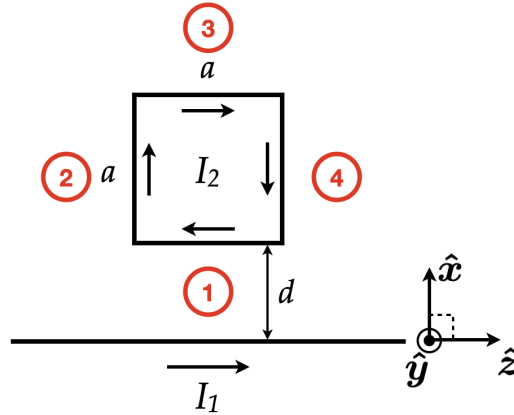
$$\vec{J}(r) = \frac{ab(V_a - V_b)}{(b - a)\rho} \frac{\hat{r}}{r^2}.$$

- (c) Usando a lei de Ohm $\vec{J} = \vec{E}/\rho$, obtemos

$$\vec{E}(r) = \frac{ab(V_a - V_b)}{(b - a)} \frac{\hat{r}}{r^2}.$$

Questão 2

Uma espira quadrada de lado a e um fio retilíneo infinito estão no mesmo plano com o fio paralelo a um dos lados da espira, como mostrado na figura. O fio é percorrido por corrente I_1 , enquanto a espira é percorrida por corrente I_2 , ambas estacionárias, nas direções e sentidos indicados na figura.



- (a) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo magnético gerado pela corrente do fio retilíneo num ponto situado à uma distância r . Justifique o cálculo e considerações feitas.
- (b) (1,5 ponto) Calcule o vetor força magnética exercida nos trechos 2 e 4 da espira.
- (c) (1,5 ponto) Calcule o vetor força magnética exercida nos trechos 1 e 3 da espira bem como o vetor força total.

Solução da questão 2

- (a) Por simetria, o campo gerado por um fio retilíneo infinito só pode estar na direção polar $\hat{\phi}$ e depender da distância r , i.e., $\vec{B} = B(r) \hat{\phi}$. Por meio da lei de Ampère aplicada a um circuito circular concêntrico ao fio, temos:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int \left(B(r) \hat{\phi} \right) \cdot \left(r d\phi \hat{\phi} \right) = 2\pi r B(r) = \mu_0 I_{int} = \mu_0 I_1.$$

Logo, o campo gerado pelo fio retilíneo é

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \hat{\phi} \quad (\text{coord. cilíndricas}).$$

- (b) A força magnética exercida sobre um segmento infinitesimal de fio $d\vec{\ell}$ transportando corrente I na presença de um campo magnético $\vec{B}$ é dada por

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}.$$

Para cada pedaço de fio podemos escrever

$$\begin{aligned} d\vec{F}_2 &= I_2 (dx \hat{x}) \times \left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} \hat{y} \right) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} dx \hat{z} \\ d\vec{F}_4 &= I_2 (dx \hat{x}) \times \left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} \hat{y} \right) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} dx \hat{z} \end{aligned}$$

Por integração, temos:

$$\begin{aligned} \vec{F}_2 &= \int d\vec{F}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \hat{z} \int_d^{d+a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \left(\frac{d+a}{d} \right) \hat{z} \\ \vec{F}_4 &= \int d\vec{F}_4 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \hat{z} \int_{d+a}^d \frac{dx}{x} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \left(\frac{d+a}{d} \right) \hat{z} \end{aligned}$$

- (c) De forma análoga ao item (b),

$$\begin{aligned} d\vec{F}_1 &= I_2 (dz \hat{z}) \times \left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \hat{y} \right) = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} dz \hat{x} \\ d\vec{F}_3 &= I_2 (dz \hat{z}) \times \left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d+a)} \hat{y} \right) = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi(d+a)} dz \hat{x} \end{aligned}$$

Por integração, temos:

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= \int d\vec{F}_1 = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \hat{\mathbf{x}} \int_{z+a}^z dz' = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi d} \hat{\mathbf{x}} \\ \vec{F}_3 &= \int d\vec{F}_3 = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi(d+a)} \hat{\mathbf{x}} \int_z^{z+a} dz' = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi(d+a)} \hat{\mathbf{x}}\end{aligned}$$

Sendo assim, o vetor força total é dado por

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \left(\frac{a}{d} - \frac{a}{d+a} \right) \hat{\mathbf{x}} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \frac{a^2}{d(d+a)} \hat{\mathbf{x}}$$

Questão 3

Um longo cilindro maciço condutor de raio R é orientado com seu eixo de simetria ao longo da direção z . O cilindro é percorrido por densidade de corrente elétrica $\vec{J}(r) = kr \hat{z}$, onde k é uma constante real positiva e r é a distância radial ao eixo do cilindro.

- (a) (1,0 ponto) Calcule a corrente total fluindo pelo condutor.
- (b) (1,5 ponto) Determine o vetor campo magnético na região interior ao cilindro;
- (c) (1,0 ponto) Determine o vetor campo magnético na região exterior ao cilindro;

Solução da questão 3

- (a) A corrente total é obtida por integral de superfície de $\vec{J}$. Tomando como superfície de integração a seção transversal do cilindro, temos:

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int (kr \hat{z}) \cdot (2\pi r dr \hat{z}) = 2\pi k \int_0^R r^2 dr \implies I = \frac{2}{3}\pi k R^3,$$

onde $d\vec{A} = 2\pi r dr \hat{z}$.

- (b) Tendo em vista simetria cilíndrica do fio e a direção na qual a corrente percorre, o campo magnético aponta na direção polar $\hat{\phi}$ e depende da distância r , i.e., $\vec{B} = B(r) \hat{\phi}$. Tomando como circuito amperiano, um círculo de raio r concêntrico ao cilindro, podemos escrever via lei de Ampère:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int (B(r) \hat{\phi}) \cdot (r d\phi \hat{\phi}) = 2\pi r B(r) = \mu_0 I_{int},$$

onde a corrente interna I_{int} para o circuito em questão pode ser obtido de forma similar ao cálculo do item (a) por meio da área interna ao circuito e $0 \leq r \leq R$:

$$I_{int} = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int_0^r (kr' \hat{z}) \cdot (2\pi r' dr' \hat{z}) = \frac{2}{3}\pi k r^3.$$

Logo

$$\vec{B}(0 \leq r \leq R) = \frac{1}{3}\mu_0 k r^2 \hat{\phi}$$

- (c) Na região $r > R$, a corrente interna a um circuito amperiano circular concêntrico ao cilindro é igual àquela calculada no item (a)

$$I_{int}(r > R) = \frac{2}{3}\pi k R^3.$$

Então

$$2\pi r B(r) = \frac{2}{3}\mu_0 \pi k R^3 \implies \vec{B}(r > R) = \frac{1}{3}\mu_0 k R^3 \frac{1}{r} \hat{\phi}$$

Formulário

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V, \quad dR = \rho \frac{d\ell}{A}, \quad R = \int dR, \quad V = RI, \quad \vec{J} = \sigma \vec{E} = \frac{1}{\rho} \vec{E},$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}, \quad \vec{\mu} = I \vec{A}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int}.$$

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}, \quad d\vec{\tau} = \vec{r} \times d\vec{F}, \quad \vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}, \quad U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B},$$

$$\int \frac{dx}{(c+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{c(c+x^2)^{1/2}}, \quad \int \frac{x dx}{(c+x^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(c+x^2)^{1/2}}.$$