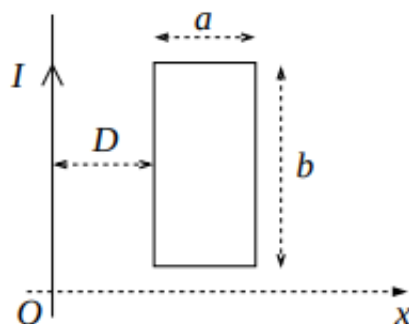


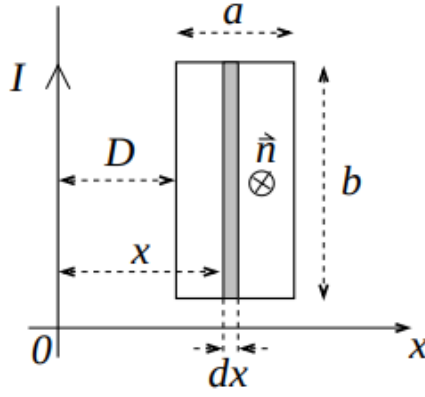
Física III-4323203
Escola Politécnica-2025
Prova P3-Gabarito

Questão 1

Considere um fio infinito percorrido por uma corrente I constante ao longo da direção y . O módulo do campo magnético produzido pelo fio à uma distância r qualquer é dado por $B = \mu_0 I / (2\pi r)$. Paralelo ao fio, está uma espira retangular de lados a e b e resistência R . A distância da espira ao fio infinito é D , conforme mostra a figura.



- (a) (1,0 ponto) Calcule o fluxo do campo magnético sobre a área da espira;
- (b) (1,0 ponto) Calcule a mútua indutância do sistema fio-espira.
- (c) (0,5 ponto) Suponha que a espira é deslocada com velocidade $\vec{v}$ constante paralelamente ao fio. Calcule o valor da corrente na espira;
- (d) (1,0 ponto) Suponha que a espira é aproximada do fio com velocidade $\vec{v}$ ao longo da direção x , perpendicular a esse fio. Calcule a força eletromotriz induzida e a corrente na espira no instante em que a distância da espira ao fio é x . Determine o sentido da corrente induzida (horário ou anti-horário), justificando sua resposta



Solução da questão 1

- (a) A partir da figura acima e tomando $d\vec{A} = bdx\hat{n}$, o fluxo é dado por

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_D^{D+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} b dx = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \left(\frac{D+a}{D} \right), \quad (1)$$

e portanto

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \left(\frac{D+a}{D} \right)$$

- (b) A mútua indutância é dada por $M = \Phi_B / I = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \left(\frac{D+a}{D} \right)$ e portanto

$$M = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \left(\frac{D+a}{D} \right)$$

- (c) Como o deslocamento é paralelo ao fio infinito não há variação de fluxo magnético, logo $\varepsilon = 0$ e portanto $I = 0$.

- (d) Tendo em vista $\Phi_B = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \left(\frac{x+a}{x} \right)$ e $\varepsilon = -d\Phi_B/dt$ e obtendo a variação temporal do fluxo magnético Φ_B , temos

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{\mu_0 I b}{2\pi} \left[\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x} \right] = -\frac{\mu_0 I a b}{2\pi x(x+a)} \frac{dx}{dt} = \frac{\mu_0 I a b v}{2\pi x(x+a)}. \quad (2)$$

A corrente induzida sobre a espira é obtida por $I_{ind} = \varepsilon/R$ e portanto

$$I_{ind} = \frac{\mu_0 I a b v}{2\pi R x(x+a)}$$

Tendo em vista o fluxo aumentar com o tempo a medida que a espira aproxima-se do fio e considerando a lei de Lenz, temos que o sentido da corrente induzida é anti-horário.

Questão 2

Considere um solenóide ideal de N espiras, raio R e comprimento $\ell \gg R$, por onde passa uma corrente elétrica I . O vetor campo magnético produzido pelo solenóide é $\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{\ell} \hat{k}$.

- (a) (1,0 ponto) Considerando a magnitude do campo magnético no interior do solenóide ideal, determine o fluxo magnético através de uma única espira do solenóide.
- (b) (0,5 ponto) Determine a auto-indutância do solenóide.
- (c) (1,0 ponto) Suponha agora que a corrente elétrica no solenóide varia no tempo como $I(t) = \beta t$, onde $\beta > 0$. Um anel circular de cobre com raio $r < R$ é posicionado no interior do solenóide, paralelamente às espiras do solenóide, de forma que o eixo do solenóide passe pelo centro do anel. Determine o vetor campo elétrico no anel.

Solução da questão 2

(a) O fluxo do campo magnético sobre 1 espira do solenóide é:

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \left(\frac{\mu_0 I N}{\ell} \right) \pi R^2, \quad (3)$$

e portanto $\boxed{\phi_B = \frac{\mu_0 I N \pi R^2}{\ell}}.$

(b) Dado o fluxo magnético obtido no item anterior, a auto-indutância $L = N\Phi_B/I$ é dada

por $\boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{\ell}}.$

(c) A partir do item (a) a fluxo magnético atravessando o anel é dado por

$$\Phi_B(t) = \frac{\mu_0 I(t) N \pi r^2}{\ell} = \frac{\mu_0 \beta t N \pi r^2}{\ell} \quad \rightarrow \quad \frac{d\phi_B(t)}{dt} = \frac{\mu_0 \beta N \pi r^2}{\ell} \quad (4)$$

Usando a Lei de Faraday, temos que $\vec{E} = E\hat{\theta}$, de forma que as linhas de campo elétrico formam circunferências concêntricas (perpendiculares ao eixo passando pelo centro do solenóide) apontando na direção $\hat{\theta}$. Temos então

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\phi_B(t)}{dt} \quad \rightarrow \quad E \cdot 2\pi r = \frac{\mu_0 \beta N \pi r^2}{\ell}$$

e portanto $\boxed{\vec{E} = \frac{\mu_0 \beta N r}{2\ell} \hat{\theta}}.$

Questão 3

Seja $\vec{E}(z, t) = E_0 \sin[2\pi(\alpha z + \beta t)]\hat{i}$ o vetor campo elétrico descrevendo uma onda monocromática plana propagando-se no vácuo, onde α e β denotam constantes positivas.

- (a) (1,0 ponto) Determine a direção e o sentido de propagação da onda. Calcule o comprimento de onda e a frequência desta onda em função das constantes α e β .
- (b) (1,0 ponto) Qual é a relação entre α e β para que o vetor campo elétrico $\vec{E}(z, t)$ satisfaça a equação de uma onda eletromagnética propagando-se no vácuo?
- (c) (1,0 ponto) Obtenha o vetor campo magnético $\vec{B}(z, t)$ como função de E_0, α, β e c (velocidade da luz no vácuo).
- (d) (0,5 ponto) Obtenha o vetor de Poynting instantâneo.
- (e) (0,5 ponto) Obtenha a energia da radiação transferida a uma placa de área A durante um intervalo de tempo Δt , supondo uma incidência normal sobre a placa inicialmente em repouso. Considere que a placa *absorve* totalmente a energia proveniente da radiação.

Solução da questão 3

- (a) A onda propaga-se na direção do eixo z no sentido decrescente, de forma que $\vec{c} = -c\hat{k}$.

Comparando com a expressão de uma onda monocromática plana dada por $\vec{E}(z, t) = E_0 \sin[kz + \omega t]\hat{i}$ obtemos $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\alpha$, de onde obtemos $\alpha = 1/\lambda$. Procedendo de forma análoga com o outro termo temos $\omega = 2\pi f = 2\pi\beta$ e portanto $f = \beta$.

- (b) A equação de uma onda eletromagnética propagando-se na direção z é dada por

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (5)$$

Substituindo a expressão para $\vec{E}(z, t)$ na expressão acima obtemos

$$-4\pi^2\alpha^2 E_0 \sin[2\pi(\alpha z + \beta t)]\hat{i} = \frac{-4\pi^2\beta^2 E_0 \sin[2\pi(\alpha z + \beta t)]\hat{i}}{c^2},$$

de forma que $\beta = c\alpha$.

- (c) A expressão para o campo magnético $\vec{B}$ considerando uma onda monocromática plana é

$$\vec{B} = -\frac{\hat{k}}{c} \times \vec{E}(z, t) \quad \rightarrow \quad \vec{B}(z, t) = -\frac{E_0}{c} \sin[2\pi(\alpha z + \beta t)]\hat{j}$$

- (d) O vetor de Poynting $\vec{S}$ é dado por $\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$ de forma que

$$\vec{S} = -\frac{1}{\mu_0 c} E_0^2 \sin^2[2\pi(\alpha z + \beta t)]\hat{k}$$

- (e) O vetor de Poynting relaciona-se com a densidade de energia $u = U/V$ por meio da relação

$u = \frac{\langle |\vec{S}| \rangle}{c}$, sendo $\langle |\vec{S}| \rangle$ o valor médio do vetor de Poynting sobre um período, de onde obtemos $\langle |\vec{S}| \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}$. Tendo em vista a densidade de energia ser escrita da seguinte forma $u = \frac{U}{Ac\Delta t}$, obtemos

$$U = \frac{E_0^2 A \Delta t}{2\mu_0 c}$$

Formulário

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}, \quad d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}, \quad \Phi^{total} = LI, \quad \Phi_{21}^{total} = M_{21}I_1 = MI_1, \quad u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad U_m = \frac{LI^2}{2},$$

$$u_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}, \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad \mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\frac{d\Phi_m}{dt},$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A}, \quad I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}, \quad \vec{B} = \frac{\hat{c} \times \vec{E}}{c},$$

$$f = 1/T, \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}, \quad S = uc, \quad u = u_e + u_m = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad I = \langle S \rangle = \frac{E_m B_m}{2\mu_0},$$

$$\langle \cos^2(kx - \omega t + \phi) \rangle = \langle \sin^2(kx - \omega t + \phi) \rangle = 1/2, \quad \langle \cos(kx - \omega t + \phi) \sin(kx - \omega t + \phi) \rangle = 0,$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right), \quad \cos A - \cos B = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{A-B}{2}\right).$$

$$\sin A + \sin B = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Dado um campo vetorial $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$, o rotacional do campo é dado por:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$