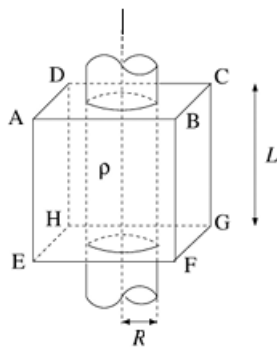


Física III-4323203
Escola Politécnica-2025
Prova SUB-Gabarito

Questão 1

Um cilindro isolante, infinito, com raio R tem uma densidade volumétrica de carga uniforme igual a ρ .

- (a) (1,0) Calcule o vetor campo elétrico dentro do cilindro.
- (b) (0,5) Calcule o vetor campo elétrico fora do cilindro.
- (c) (1,5) Adotando o potencial elétrico nulo em $r = R$ obtenha $V(r)$ na região $r < R$ e $r > R$.



Solução da questão 1

- (a) Dentro do cilindro tomamos como superfície gaussiana um cilindro de altura h e coaxial com o cilindro infinito. Usando a Lei de Gauss $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{int}/\epsilon_0$ e considerando que se tem fluxo elétrico apenas na superfície lateral do cilindro, o lado esquerdo vale então $E(r)2\pi rh$. Como a carga se distribui uniformemente ao longo do cilindro, o lado direito vale $\rho\pi r^2h$, de forma que

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \hat{r}.$$

- (b) Usando o mesmo raciocínio do item (a), o lado esquerdo é o mesmo, $E(r)2\pi rh$, porém agora o lado direito vale $\rho\pi R^2h$, de forma que

$$\vec{E} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \hat{r}.$$

- (c) Usando a definição de potencial elétrico $V(a) - V(b) = -\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$ juntamente do cálculo de $\vec{E}$ obtido no item (a) para $r > R$ levando-se em conta que $V(R) = 0$ temos

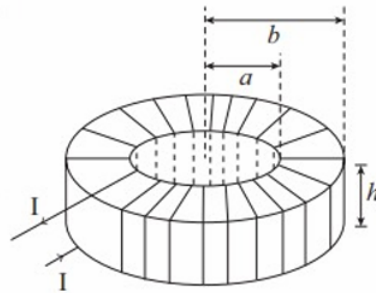
$$V(R) - V(r) = -\int_r^R \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \hat{r} \cdot d\vec{r} = \left[\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln\left(\frac{R}{r}\right) \right]$$

Procedendo de forma similar para $r < R$ temos

$$V(r) - V(R) = -\int_R^r \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \hat{r} \cdot d\vec{r} = \left[\frac{\rho}{4\epsilon_0} (R^2 - r^2) \right]$$

Questão 2

Considere um solenoide toroidal de seção retangular conforme mostra a figura abaixo. Esse toroide possui N espiras, raios interno e externo a e b , respectivamente, altura h e é percorrido por uma corrente I .



- (a) (1,0 ponto) Usando a Lei de Ampere, obtenha o vetor campo magnético no interior do toróide;
- (b) (1,0 ponto) Calcule o fluxo magnético que atravessa a seção transversal do toroide;
- (c) (0,5 ponto) Calcule a auto-indutância do toroide.
- (d) (1,5 ponto) Supondo agora que a corrente percorrendo o toroide varie com o tempo de acordo com a relação $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$, encontre a força eletromotriz induzida ε .

Solução - Questão 2

- (a) Usando a regra da mão direita, temos que $\vec{B} = B(r)\hat{\phi}$. Escolhendo como linha Amperiana uma linha circular "cortando" o toróide, e usando a Lei de Ampère, $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{int}$, temos que $B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 NI$, de onde obtemos

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \hat{\phi}$$

- (b) Definindo o elemento de área da seção transversal quadrada do toroide como $d\vec{A} = h dr \hat{\phi}$, onde r varia entre a e b , temos que o fluxo magnético, dado por $\phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$ é dado por

$$\phi_B = h \int_a^b B(r) dr = \frac{\mu_0 NI h}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 NI h}{2\pi} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

- (c) Tendo em vista que $N\phi_B = LI$, obtemos

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

- (d) De acordo com a lei de Faraday $\varepsilon = -Nd\phi_B/dt = -LdI/dt$ obtemos a relação

$$\varepsilon = \frac{\mu_0 N^2 h I_0 \omega \sin(\omega t)}{2\pi} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

Questão 3

O campo elétrico de uma onda eletromagnética obedece à expressão $\vec{E}(x, t) = E_0 \cos[\alpha x - \beta t + \gamma] \hat{y}$, onde $E_0, \alpha, \beta, \gamma$ são constantes.

- (a) (0,5 ponto) Indique qual é a direção de propagação dessa onda e determine sua velocidade de propagação.
- (b) (0,5 ponto) Determine o comprimento de onda λ , a frequência f em termos dos parâmetros dados.
- (c) (1,0 ponto) Obtenha o vetor campo magnético $\vec{B}(x, t)$ como função dos parâmetros dados.
- (d) (1,0 ponto) Considere a incidência da onda através de uma superfície quadrada plana de lado $\lambda/2$ orientada numa direção normal $\hat{n}$. Qual seria a orientação da normal desse quadrado para que a potência média que atravessa fosse máxima? Qual é o valor dessa potência média máxima P em termos dos parâmetros do enunciado?

Solução da questão 3

- (a) Temos uma onda progressiva propagando-se ao longo da direção x , cuja velocidade é dada por

$$\vec{c} = \frac{\beta}{\alpha} \hat{x}$$

- (b) Relacionando os parâmetros α e β com λ e f temos $\lambda = 2\pi/\alpha$ e tendo em vista que $\omega = 2\pi f = \beta$ e portanto $f = \beta/(2\pi)$.

- (c) Tendo em vista a relação

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \hat{x} \times \vec{E}(x, t) \rightarrow \vec{B}(x, t) = \frac{\alpha E_0}{\beta} \cos[\alpha x - \beta t + \gamma] \hat{z}$$

- (d) O vetor de Poynting $\vec{S}$ está relacionado com a potência transportada pela onda por unidade de área, cuja expressão vale

$$\vec{S}(x, t) = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\alpha E_0^2}{\beta \mu_0} \cos^2[\alpha x - \beta t + \gamma] \hat{x}.$$

Como $\vec{S}$ está orientado na direção $\hat{x}$, a maior potência média por unidade de área, dada por $\langle |\vec{S}| \rangle = \alpha E_0^2 / 2\beta \mu_0$, será aquela incidente numa superfície orientada na direção $\hat{n} = \hat{x}$. Sendo assim, a potência máxima incidente numa área quadrada de lado $\lambda^2/4$ vale

$$P = \frac{\alpha E_0^2}{2\beta \mu_0} \times \frac{\pi^2}{\alpha^2} = \frac{E_0^2 \pi^2}{2\alpha \beta \mu_0}$$

Formulário

$$\vec{F} = \frac{qq'(\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad \vec{F} = q\vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{q(\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}')dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3},$$

$$p = qd, \quad \vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}, \quad U = -\vec{p} \cdot \vec{E}, \quad \Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0},$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V,$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}, \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}, \quad C = Q/V, \quad C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots,$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots, \quad U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}, \quad u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2,$$

$$dR = \rho \frac{d\ell}{A}, \quad R = \int dR, \quad V = RI, \quad \vec{J} = \sigma \vec{E} = \frac{1}{\rho} \vec{E},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}), \quad \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sqrt{x^2 + a^2}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}}, \quad \int \frac{xdx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$\int \frac{dx}{(c + x^2)^{3/2}} = \frac{x}{c(c + x^2)^{1/2}}, \quad \int \frac{xdx}{(c + x^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(c + x^2)^{1/2}}.$$

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V, \quad dR = \rho \frac{d\ell}{A}, \quad R = \int dR, \quad V = RI, \quad \vec{J} = \sigma \vec{E} = \frac{1}{\rho} \vec{E},$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}, \quad \vec{\mu} = I \vec{A}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int}.$$

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}, \quad d\vec{\tau} = \vec{r} \times d\vec{F}, \quad \vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}, \quad U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B},$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}, \quad d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}, \quad \Phi^{total} = LI, \quad \Phi_{21}^{total} = M_{21} I_1 = M I_1, \quad u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad U_m = \frac{LI^2}{2},$$

$$u_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}, \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad \mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\frac{d\Phi_m}{dt},$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A}, \quad I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}, \quad \vec{B} = \frac{\hat{c} \times \vec{E}}{c},$$

$$f = 1/T, \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}, \quad S = uc, \quad u = u_e + u_m = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad I = \langle S \rangle = \frac{E_m B_m}{2\mu_0},$$

$$\langle \cos^2(kx - \omega t + \phi) \rangle = \langle \sin^2(kx - \omega t + \phi) \rangle = 1/2, \quad \langle \cos(kx - \omega t + \phi) \sin(kx - \omega t + \phi) \rangle = 0,$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right), \quad \cos A - \cos B = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{A-B}{2}\right).$$

$$\sin A + \sin B = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Dado um campo vetorial $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$, o rotacional do campo é dado por:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$