Física IV - 4323204

Escola Politécnica - 2023

GABARITO DA P2

9 de novembro de 2023

Questão 1

Uma partícula (partícula 1), com massa de repouso m_0 e velocidade v, colide com uma outra partícula (partícula 2) de massa de repouso $2m_0$ que se encontra em repouso, resultando numa única partícula após a colisão.

(a) (1,5 ponto) Escreva as equações de conservação que permitem o cálculo da massa de repouso M_0 e a velocidade V da partícula resultante da colisão. Deixe sua resposta em termos de v e dos demais dados do problema. Não é necessário resolver as equações.

(b) (1,0 ponto) Considerando que a partícula incidente tem energia cinética K, calcule a velocidade v desta partícula (partícula 1) em termos de K e demais dados do enunciado. Mostre que a expressão obtida se aproxima do resultado clássico no limite em que $\varepsilon \equiv K/(m_0c^2) \ll 1$.

Solução da questão 1

(a) Equação de conservação do momento linear:

$$m_0\gamma v = M_0\gamma' V \Rightarrow \boxed{\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}} = \frac{M_0 V}{\sqrt{1-\left(\dfrac{V}{c}\right)^2}}}$$

Equação de conservação da energia:

$$m_0\gamma c^2 + 2m_o c^2 = M_0\gamma' c^2 \Rightarrow \boxed{m_0 c^2\left(2+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}\right) = \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1-\left(\dfrac{V}{c}\right)^2}}}$$

(b) $$K = m_0 c^2(\gamma-1) \Rightarrow \left(\frac{K}{m_0c^2}+1\right)^2 = \frac{1}{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2} \Rightarrow \boxed{v = c\sqrt{1-\frac{1}{\left(\dfrac{K}{m_0c^2}+1\right)^2}}}$$

No caso clássico, a velocidade da partícula é dada por:

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m_0}}$$

Para o caso relativístico, temos:

$$\frac{v^2}{c^2} = 1-\frac{1}{\left(\dfrac{K}{m_0c^2}+1\right)^2} = 1-\frac{1}{(\varepsilon+1)^2}$$

No limite em que $\varepsilon \equiv K/(m_0c^2) \ll 1$, podemos fazer a seguinte aproximação:

$$\frac{v^2}{c^2} = 1-\frac{1}{(\varepsilon+1)^2} \approx 2\varepsilon \approx \frac{2K}{m_0c^2} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} \approx \frac{2K}{m_0c^2} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2K}{m_0}}}$$

Este resultado coincide com o resultado clássico.

Questão 2

(I) Um determinado material metálico possui função trabalho ϕ. Ao ser iluminado por luz de comprimento de onda λ, o material emite elétrons não relativísticos de massa m_0 com máxima energia cinética.

(a) (1,0 ponto) Calcule o comprimento de onda de de Broglie desses elétrons. Expresse sua resposta em termos dos dados do enunciado e demais constantes.

(b) (0,5 ponto) Em qual condição haverá emissão de elétrons desse material? Justifique.

(II) Duas estrelas A e B emitem radiação térmica como corpo negro. A potência P_A da radiação emitida pela estrela A, cujo raio é $r_A = r$, é quatro vezes maior do que a potência P_B da radiação emitida pela estrela B, cujo raio é $r_B = 3r$. Calcule a razão $\lambda_A^{\max}/\lambda_B^{\max}$ entre os comprimentos de onda no máximo da distribuição das intensidades da radiação emitidas pelas estrela A e B, respectivamente.

Solução da questão 2

(I)

(a) $K_{max} = \dfrac{hc}{\lambda} - \phi$

O comprimento de de Broglie dos elétros emitidos é:

$$\lambda_{\text{de Broglie}} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 K_{max}}} \Rightarrow \boxed{\lambda_{\text{de Broglie}} = \frac{h}{\sqrt{2m_0\left(\dfrac{hc}{\lambda} - \phi\right)}}}$$

(b) $\boxed{\text{A condição para que ocorra o efeito fotolétrico é } hc/\lambda > \phi.}$

(II)

De acordo com o enunciado, temos:

$P_A = 4P_B$,

Levando em conta que a área da estrela A é $S_A = 4\pi r^2$ e da estrela B é $S_B = 4\pi(3r)^2$, encontramos:

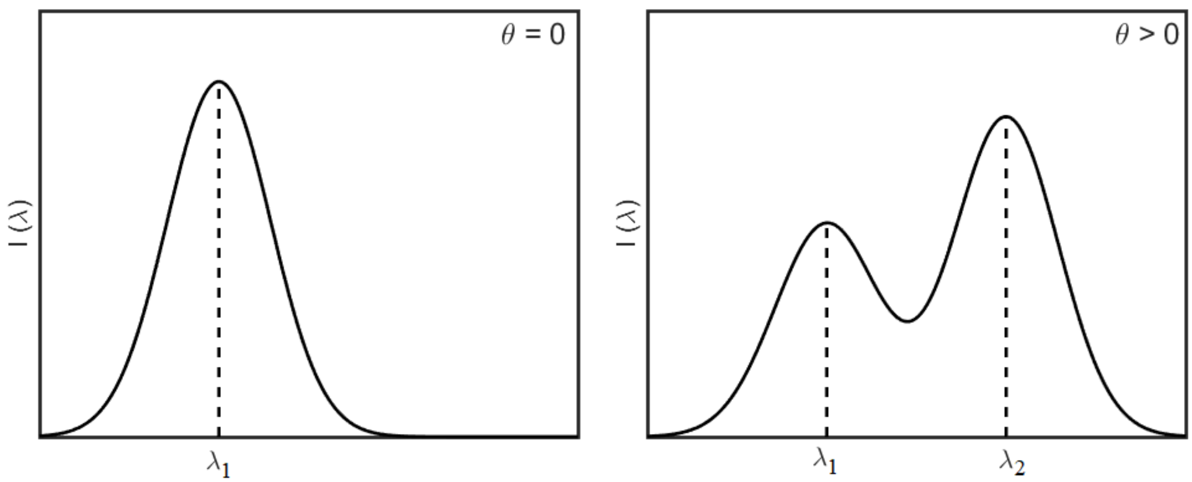
$$P_A = 4P_B \Rightarrow I_A S_A = 4 I_B S_B \Rightarrow \sigma T_A^4 S_A = 4\sigma T_B^4 S_B \Rightarrow T_A^4 4\pi r^2 = 4T_B^4 4\pi(3r)^2 \Rightarrow \frac{T_A^4}{T_B^4} = 36 \Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \sqrt{6}$$

Utilizando a lei de deslocamento de Wien, temos:

$$\frac{\lambda_A^{\max}}{\lambda_B^{\max}} = \frac{T_B}{T_A} = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow \boxed{\frac{\lambda_A^{\max}}{\lambda_B^{\max}} = \frac{1}{\sqrt{6}}}$$

Questão 3

Num experimento de espalhamento de raios X por um elétron (efeito Compton) foram medidas as intensidades $I(\lambda)$ dos raios X espalhados para dois ângulos de espalhamentos: $\theta = 0$ e $\theta > 0$, como mostrado nas figuras, onde $\lambda_1 = 1,018 \times 10^{-10}$ m e $\lambda_2 = 1,030 \times 10^{-10}$ m.



(a) (1,0 ponto) Na medição da figura do lado direito, qual é o ângulo de espalhamento θ?

(b) (1,0 ponto) Qual é a energia cinética do elétron após o espalhamento? Expresse sua resposta em termos de h, c, λ_1 e λ_2 (Não substitua os valores numéricos).

(c) (0,5 ponto) Qual é a equação para $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ para qualquer ângulo θ se os raios X fossem espalhados por prótons em repouso ao invés de elétrons? Não substitua os valores numéricos.

Solução da questão 3

(a) Na figura do lado direito, $\lambda_1 = 1,018 \times 10^{-10}$ m corresponde ao comprimento de onda (λ) do raio X incidente e $\lambda_2 = 1,030 \times 10^{-10}$ m corresponde ao comprimento de onda (λ') do espalhamento Compton. Utilizando a equação do espalhamento compton, temos:

$$\lambda' = \lambda + \lambda_C(1-\cos\theta) \Rightarrow \frac{\lambda'-\lambda}{\lambda_C} = 1-\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = 1 - \frac{\lambda'-\lambda}{\lambda_C}.$$

Substituindo os valores na expressão acima, obtemos:

$$\cos\theta = 1 - \frac{(1,030\times 10^{-10}\text{ m}) - (1,018\times 10^{-10}\text{ m})}{(2,4\times 10^{-12}\text{ m})} \Rightarrow \cos\theta = 1 - \frac{(1,2\times 10^{-12}\text{ m})}{(2,4\times 10^{-12}\text{ m})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\theta = 0,5 \Rightarrow \theta = 60^o.$$

Portanto:

$$\boxed{\theta = 60^o}$$

(b) A equação de conservação de energia é

$$\frac{hc}{\lambda_1} + m_0c^2 = \frac{hc}{\lambda_2} + E_e,$$

onde E_e é a energia total do elétron após o espalhamento. A energia cinética K do elétron depois da colisão é $K = E_e - m_0c^2$. Portanto:

$$\boxed{K = \frac{hc}{\lambda_1} - \frac{hc}{\lambda_2} = \frac{hc(\lambda_2-\lambda_1)}{\lambda_1\lambda_2}}$$

(c) Neste caso, teríamos $\lambda_C = h/(m_pc)$, onde m_p é a massa do próton, resultando em:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_pc}(1-\cos\theta) \Rightarrow \boxed{\Delta\lambda = \frac{h}{m_pc}(1-\cos\theta)}$$

Questão 4

No modelo de Bohr para o átomo de hidrogênio, um elétron, com carga e e massa de repouso m_0, percorre uma órbita circular estável de raio r tal que o módulo do momento angular L obedece a regra de quantização $L = n\hbar$. Despreze efeitos relativísticos.

(a) (1,0 ponto) Calcule a velocidade do elétron em termos de n, e, m_0, e demais constantes físicas.

(b) (1,0 ponto) Calcule a frequência do fóton emitido quando o elétron faz uma transição do nível $n = 3$ para $n = 2$. Expresse sua resposta em termos de R_H e demais constantes.

(c) (0,5 ponto) Suponha agora que o elétron faça uma transição do nível $n = 3$ para $n = 1$ com emissão de um fóton. Calcule a diferença de momento angular do elétron antes e depois transição, segundo o modelo de Bohr.

Solução da questão 4

(a) Igualando a força centrípeta F_{cp} com a força eletrostática F_{el}, temos:

$$F_{cp} = F_{el} \Rightarrow \frac{m_0 v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow (m_0 v r)v = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \Rightarrow Lv = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \Rightarrow v = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar n} \Rightarrow$$

$$\boxed{v = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar}\right)\frac{1}{n} = \left(\frac{e^2}{2\epsilon_0 h}\right)\frac{1}{n}}$$

(b) A energia do fóton emitida será:

$$E = hf = E_3 - E_2 = -\frac{hcR_H}{3^2} + \frac{hcR_H}{2^2}.$$

Portanto:

$$f = -\frac{cR_H}{9} + \frac{cR_H}{4} = \frac{5cR_H}{36} \Rightarrow \boxed{f = \frac{5cR_H}{36}}$$

(c) De acordo com o modelo de Bohr, o momento angular do elétron é dado $L = n\hbar$.

Dessa forma, a diferença entre o momento angular é:

$$\boxed{\Delta L = 2\hbar}$$

Formulário

$$E = \gamma m_0 c^2, \quad \vec{p} = \gamma m_0 \vec{u}, \quad K = (\gamma - 1) m_0 c^2, \quad E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2, \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

Efeito Doppler em termos do comprimento de onda: $\lambda' = \lambda\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$ ou $\lambda' = \lambda\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$,

$$I_{total} = \sigma T^4, \quad \sigma \approx 6 \times 10^{-8} \, \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 K^4}} \, ; \quad \lambda_m T = 2,9 \times 10^{-3} \ \mathrm{m \cdot K} \, ;$$

$$K_{máx} = hf - \phi, \quad E_f = hf = hc/\lambda, \quad p_f = h/\lambda$$

$$E_n = -hcR_H/n^2, \text{ onde } hcR_H = 13.6 \text{ eV},$$

$$\lambda' = \lambda + \lambda_C(1 - \cos\theta), \text{ onde } \lambda_C = h/(m_0 c) = 2,4 \times 10^{-12} \text{ m},$$

$$\lambda = h/p,$$

$$f(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} \approx 2x \text{ para } |x| \ll 1$$