Física IV - 4323204

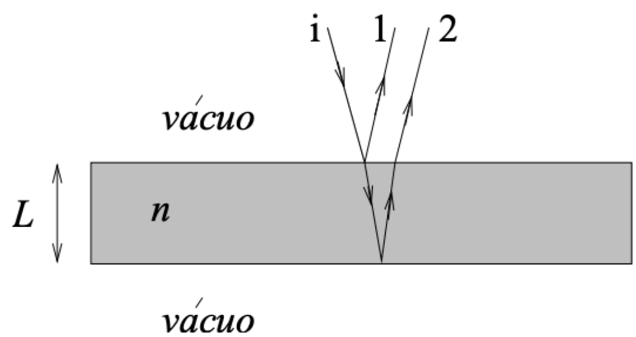
Escola Politécnica - 2023

GABARITO DA SUB

21 de dezembro de 2023

Questão 1

Uma película fina transparente, de espessura L, e índice de refração $n = 1,5$ é iluminada por luz branca, como mostrado na figura. Após incidir na superfície superior da película, o raio incidente i se divide no raio refletido 1 e no raio transmitido 2, que por sua vez sobre reflexão na parte inferior da película. Considere que o ângulo de incidência seja aproximadamente normal.



(a) (1,0 ponto) Qual condição deve ser satisfeita para que haja interferência construtiva entre os raios 1 e 2? Expresse sua resposta em termos do comprimento de onda da luz incidente λ, n, e L.

(b) (1,0 ponto) Qual condição deve ser satisfeita para que haja interferência destrutiva entre os raios 1 e 2? Expresse sua resposta em termos do comprimento de onda da luz incidente λ, n, e L.

(c) (0,5 ponto) Se esta película for colocada sob o diamante, cujo índice de refração corresponde a 2,4, qual a condição para que haja inteferência destrutiva?

Solução da questão 1

(a) Como o índice de refração da película é maior que o do vácuo, o raio 1 sofre uma defasagem de $\phi_1 = \pi$ radianos. Já a fase do raio 2 é:

$\phi_2 = \dfrac{4\pi L n}{\lambda}$

Para que haja interferência construtiva, a diferencça de fase entre os dois raios precisa ser igual a múltiplo de 2π radianos, ou seja:

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = \frac{4\pi L n}{\lambda} - \pi = 2\pi m \Rightarrow \boxed{\lambda(2m+1) = 4Ln, \quad m = 0, 1, 2...}$$

(b) Como o índice de refração da película é maior que o do vácuo, o raio 1 sofre uma defasagem de $\phi_1 = \pi$ radianos. Já a fase do raio 2 é:

$\phi_2 = \dfrac{4\pi L n}{\lambda}$

Para que haja interferência destrutiva, a diferencça de fase entre os dois raios precisa satisfazer a seguinte expressão:

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = \frac{4\pi L n}{\lambda} - \pi = 2\pi(m + 1/2) \Rightarrow \boxed{m\lambda = 2Ln, \quad m = 1, 2, 3...}$$

(c) Neste caso, teremos $\phi_1 = \pi$ radiatnos e

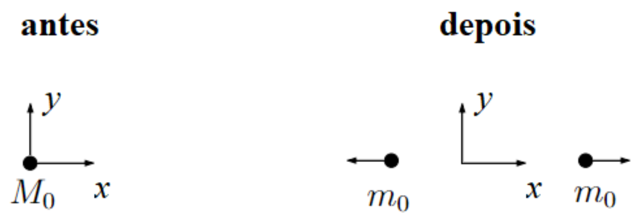
$\phi_2 = \dfrac{4\pi L n}{\lambda} + \pi.$

Portanto:

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = \frac{4\pi L n}{\lambda} = 2\pi(m + 1/2) \Rightarrow \boxed{\lambda(2m+1) = 4Ln, \quad m = 0, 1, 2...}$$

Questão 2

Uma partícula, de massa de repouso M_0, inicialmente em repouso, decai produzindo duas partículas idênticas, cada uma com massa de repouso m_0, conforme ilustrado na figura abaixo.



(a) (1,0 ponto) Calcule a energia cinética de cada uma das partículas resultantes. Expresse sua resposta em termos de M_0, m_0, e c.

(b) (1,0 ponto) Considerando que as partículas resultantes viajam na direção x, calcule o vetor velocidade de cada partícula resultante. Expresse sua resposta em termos de M_0, m_0, e c.

(c) (0,5 ponto) Calcule o vetor velocidade das partículas resultantes se a massa de repouso $m_0 = 0$.

Solução da questão 2

(a) Pela conservação de energia, temos:

$$M_0c^2 = \gamma m_0c^2 + \gamma m_0c^2 \Rightarrow \gamma = \frac{M_0}{2m_0}.$$

Portanto, a energia cinética de cada partícula é:

$$K = (\gamma - 1)m_0c^2 \Rightarrow \boxed{K = \left(\frac{M_0}{2m_0} - 1\right) m_0c^2 = \frac{M_0c^2}{2} - m_0c^2}$$

(b) O módulo da velocidade de cada partícula resultante pode ser calculada através de:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow \gamma^2 = \frac{1}{1 - v^2/c^2} \Rightarrow v = c\sqrt{\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}} \Rightarrow v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \Rightarrow$$

$$v = c\sqrt{1 - \frac{4m_0^2}{M_0^2}}$$

Portanto, o vetor velocidade da partícula 1 é:

$$\boxed{\vec{v} = \hat{i}c\sqrt{1 - \frac{4m_0^2}{M_0^2}}}$$

e da partícula 2 é:

$$\boxed{\vec{v} = -\hat{i}c\sqrt{1 - \frac{4m_0^2}{M_0^2}}}$$

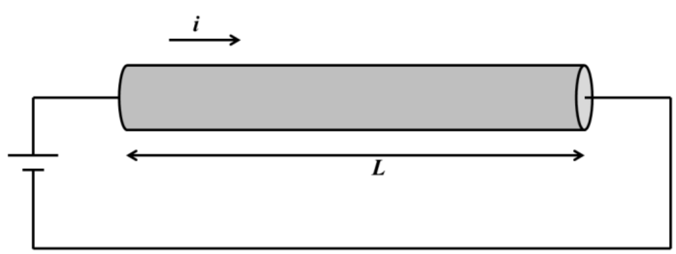
(c) Substituindo $m_0 = 0$ nas expressões obtidas no item (b), encontramos:

$\boxed{\vec{v} = \hat{i}c}$ e $\boxed{\vec{v} = -\hat{i}c}$

Questão 3

(I) (1,5 ponto) Um observador em repouso na plataforma de uma estação quer medir a velocidade com que um trem se afasta da mesma. Para isto ele emito uma onda eletromagnética de frequência f_0. Um viajante de dentro do trem recebo o sinal eletromagnético e retransmite-o de volta ao observador na plataforma. Este por sua vez mede a frequência da onda chegando do trem e constata que seu valor é f. Obtenha a velocidade do trem em função de de f, f_0 e c.

(II) (1,0 ponto) Um resistor cilíndrico com raio a e comprimento L transporta uma corrente i (figura abaixo) e tem potência dissipada por $P = Ri^2$. O resistor irradia como um corpo negro, emititindo radiação eletromagnética apenas pela sua superfície lateral. Encontre a expressão para a temperatura na superfície lateral do resistor.



Solução da questão 3

(I) A frequência f' medida pelo observador no trem será:

$$f' = f_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}.$$

A onda retransmitida pelo trem, com frequência f', terá uma frequência f para o observador na plataforma, ou seja:

$$f = f'\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}.$$

Combinado as duas expressões, temos:

$$f = f_0\frac{c-v}{c+v} \Rightarrow \boxed{v = \left(\frac{f_0 - f}{f_0 + f}\right)c}$$

(II) De acordo com a lei de Stefan-Boltzmann, a potência irradiada pela superfície lateral do resistor pode ser calculada através de

$$I = \sigma T^4 \Rightarrow \frac{P}{A} = \sigma T^4 \Rightarrow \frac{P}{2\pi a L} = \sigma T^4 \Rightarrow P = 2\pi a L \sigma T^4$$

Igualando a potência acima, com a potência elétrica no resistor, dada por $P = Ri^2$, encontramos:

$$Ri^2 = 2\pi a L\sigma T^4 \Rightarrow \boxed{T = \left(\frac{Ri^2}{2\pi a L\sigma}\right)^{1/4}}$$

Questão 4

A função de onda de uma partícula de massa m sujeita ao potencial $U(x) = m\omega^2 x^2/2$ correspondente ao nível de menor energia é:

$$\Psi(x) = A \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)$$

(a) (1,0 ponto) Calcule a constante A.

(b) (1,0 ponto) Calcule a energia da partícula neste estado.

(c) (0,5 ponto) Calcule a probabilidade de encontrar a partícula para $x > 0$.

Solução da questão 4

(a) Aplicando a condição de normalização, temos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right) dx = 1 \Rightarrow \boxed{A = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}}$$

(b) Substituindo $\Psi(x)$ e $U(x)$ na equação de Schrödinger, temos:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x) \Rightarrow$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\left(\frac{m\omega}{\hbar}x\right)^2 - \frac{m\omega}{\hbar}\right] A\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right) + \left(\frac{m\omega^2 x^2}{2}\right) A\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right) = EA\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right) \Rightarrow$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\left(\frac{m\omega}{\hbar}x\right)^2 - \frac{m\omega}{\hbar}\right] + \left(\frac{m\omega^2 x^2}{2}\right) = E \Rightarrow \boxed{E = \frac{\hbar\omega}{2}}$$

(c) Como a função de onda é simétrica em relação a $x = 0$, temos: $\boxed{P = 1/2}$

Formulário

$$I = I_0 \left[\frac{\operatorname{sen}(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2, \quad \beta = \frac{2\pi a}{\lambda}\operatorname{sen}\theta, \qquad \begin{cases} x' = \gamma\,(x - ut)\,, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{ux}{c^2}\right), \end{cases} \qquad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

$$\ell = \ell_0\sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad v_x' = \frac{v_x - u}{1 - \dfrac{uv_x}{c^2}}, \quad E = \gamma m_0 c^2, \quad \vec{p} = \gamma m_0 \vec{u},$$

$$K = (\gamma - 1)m_0c^2, \quad K_{máx} = hf - \phi, \quad E_f = hf = hc/\lambda, \quad p_f = h/\lambda$$

Efeito Doppler em termos do comprimento de onda: $\lambda' = \lambda\sqrt{\dfrac{c+v}{c-v}}$ ou $\lambda' = \lambda\sqrt{\dfrac{c-v}{c+v}}$,

$E_n = -hcR_H/n^2$, onde $hcR_H = 13.6$ eV, $E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$

$\lambda' = \lambda + \dfrac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta)$, onde m_0 é a massa de repouso do elétron e θ é o ângulo de espalhamento do fóton,

$$\lambda = h/p, \quad \Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2, \quad \Delta y \Delta p_y \geq \hbar/2, \quad k = 2\pi/\lambda, \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x),$$

$$I_{total} = \sigma T^4, \quad \sigma \approx 6 \times 10^{-8}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K^4}}\ ; \quad \lambda_m T = 2,9 \times 10^{-3}\ \mathrm{m\cdot K}\ ;$$

$$\int x^3 e^{-x}dx = (-x^3 - 3x^2 - 6x - 6)e^{-x}, \quad \int x^2 e^{-x}dx = (-x^2 - 2x - 2)e^{-x}.$$

$$\textstyle\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = n!, \quad \int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha x^2}dx = \sqrt{\pi}\ \alpha^{-1/2}, \quad \int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-\alpha x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\ \alpha^{-3/2}.$$