FAP296

27 de outubro de 1998

P 2

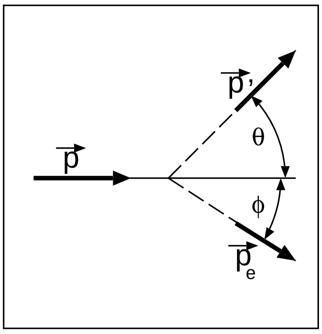
Física–4 para a Escola Politécnica

- ✔ Esta prova tem duração de 100 minutos
- ✔ Escreva de forma legível
- ✔ É proibida a consulta a colegas, livros e apontamentos
- ✔ É proibido o uso de calculadoras
- ✔ Resolva cada questão em sua folha própria
- ✔ Após 60 min, a compreensão do enunciado passa a fazer parte da questão

1– Um fóton com momento $p = h/\lambda_o$ colide contra um elétron livre. O elétron emerge da colisão com momento p_e; o fóton espalhado, com momento p', nas direções indicadas pelos ângulos φ e θ, conforme indicado na figura. A diferença entre os comprimentos de onda do fóton espalhado e do fóton incidente é dada por

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda_o = \lambda_c\,(1 - \cos\theta)$$

onde $\lambda_c = h/mc$ e m é a massa do elétron.



Questão 1

a. (1.5) Usando as leis de conservação associadas a este processo de espalhamento, escreva as equações que permitem derivar a expressão acima para $\Delta\lambda$, envolvendo p, p', p_e, θ e φ. (**Atenção:** Não é necessário resolver estas equações.)

b. (1.0) Se o fóton espalhado tiver energia igual a 10(dez) vezes a *energia cinética* do elétron espalhado, qual será a relação entre p' e p?

2– O modelo de Bohr para o átomo de hidrogênio aplica-se também para um átomo hidrogenóide, i.é. íons com carga do núcleo Ze mas com um só elétron na eletrosfera. Neste caso, os níveis de energia são dados por

$$E_n = -13,6\frac{Z^2}{n^2}eV; \quad n = 1, 2, ...$$

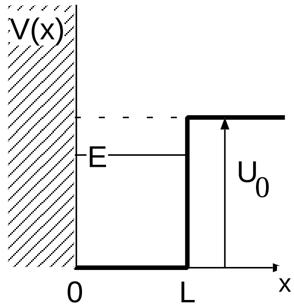
a. (1.0) Um elétron, inicialmente em repouso, é acelerado por uma diferença de potencial V e feito colidir com um átomo de hidrogênio ($Z = 1$) em repouso, que está no estado fundamental ($n = 1$). Determine o valor mínimo, $V_{\rm min}$, do potencial de aceleração, para que toda a energia do elétron incidente seja absorvida pelo átomo;

b. (1.5) Um íon de hélio, He^+, (com $Z = 2$) emite um fóton devido ao decaimento de um estado excitado para outro. O fóton emitido é totalmente absorvido pelo átomo de hidrogênio próximo ao íon de hélio. Determine os estados de menor número quântico principal n do íon de hélio e do átomo de hidrogênio, envolvidos nestas transições.

3– Uma partícula de massa m está confinada a uma caixa unidimensional de largura L e paredes de altura infinita (energia potencial $U \to \infty$)

a. (1.0) Resolva a equação de Schrödinger para este caso, obtendo as expressões para os níveis de energia da partícula e para a função de onda Ψ.(**Atenção:** Não é necessário normalizar a função de onda.)

b. (1.5) Considere agora a situação em que a partícula está confinada a um poço que tem a parede em $x = L$ com altura finita, constante, para a qual $U = U_0$ conforme a figura indica. Escreva a equação de Schrödinger para esta situação: para a região I, $(0 \leq x \leq L)$; e para a região II, $(x > L)$, denominando as soluções nestas regiões $\Psi_I(x)$ e $\Psi_{II}(x)$. Aplique as condições de contorno que elas devem satisfazer, em $x = 0$ e em $x = L$.(**Atenção:** Não é necessário resolver as equações.)



Questão 3

4– A solução da equação de Schrödinger para o átomo de hidrogênio mostra que as funções de onda associadas aos estados orbitais dependem de três números quânticos, n, ℓ e m_ℓ. Além disso, cada estado orbital pode ter outros estados de spin do elétron, definidos pelo valor do número quântico m_s.

a. (1.0) Na Tabela abaixo, são dados os valores dos números quânticos associados a possíveis estados do átomo de hidrogênio. Indique quais estados são fisicamente possíveis. Dentre eles, quais são estados degenerados; ou seja, estados que possuem diferentes números quânticos, mas com mesma energia:

estado	n	ℓ	m_ℓ	m_s
a	3	1	2	1/2
b	4	2	-2	-1/2
c	4	2	-2	-3/2
d	3	0	0	1/2
e	4	-2	2	-1/2
f	4	0	0	1/2
g	3	2	-2	-1/2
h	3	0	0	1/2
i	4	3	-3	1/2
j	3	0	-3	-1/2

b. (1.5) A função de onda do estado fundamental do átomo de hidrogênio é

$$\Psi_{1s}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_o^3}} e^{-r/a_0} \quad \text{onde} \quad a_o = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{mc^2} = 0,529\,nm \quad \text{é o raio de Bohr.}$$

Determine o valor mais provável de r para a órbita eletrônica e a probabilidade do elétron se encontrar entre $r = 0$ e $r = a_o/2$.

Formulário

- **Coordenadas retangulares** (x, y, z)

1.	$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$	$d\,\vec{\ell} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$
2.		$dS_z\,\vec{k} = dx\,dy\,\vec{k}$
3.		$dv = dx\,dy\,dz$

- **Coordenadas cilíndricas** (ρ, φ, z)

1.	$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$	$d\,\vec{\ell} = d\rho\,\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\,\vec{e}_\varphi + dz\,\vec{e}_z$
2.		$dS_\rho\,\vec{e}_\varphi = \rho\,dz\,d\varphi\,\vec{e}_\varphi$
3.		$dv = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$

- **Coordenadas esféricas** (r, θ, φ)

1.	$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$	$d\,\vec{\ell} = dr\,\vec{e}_r + r\,d\theta\,\vec{e}_\theta + r\,\sin\theta\,d\varphi\vec{e}_\varphi$
2.		$dS_r\,\vec{e}_r = r^2\,\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,\vec{e}_r$
3.		$dv = r^2\,\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$

$k = \dfrac{1}{4\,\pi\,\epsilon_o}$ $\quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\prime$ $\quad \vec{E}(\vec{r}) = k\displaystyle\int \frac{dq\prime}{R^2}\,\vec{e}_R$ $\quad V(\vec{r}) = k\displaystyle\int \frac{dq\prime}{|\vec{R}|}$

$\displaystyle\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_o}$ $\quad V = -\displaystyle\int \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$ $\quad U = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_i q_i V_i$ $\quad U = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\text{Vol}} \rho\,V\,dv$

$\vec{E} = -\nabla\,V$

$\int \sin^2(ax)dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a}$ $\quad \int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}$

$\int xe^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x - \frac{1}{a}\right)$ $\quad \int x^2 e^{-ax}dx = -\frac{e^{-ax}}{a^3}\left(a^2x^2 + 2ax + 2\right)$

$e^{-1} = 0,37$ $\quad h = 6,6 \times\ 10^{-34}\ J\cdot s$

$E = \gamma mc^2$	$p = \gamma m\vec{u}$	$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$	$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$
$K_{\max} = hf - \phi$	$\lambda' - \lambda = (1 - cos\theta)$	$mvr = n\hbar$	$E_f - E_i = hf$
$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$	$E_n = -\frac{13,6}{n^2}\,eV$	$\lambda = \frac{h}{p}$	$\Delta x\Delta p \geq \hbar$
$-\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\frac{d^2\Psi}{dx^2} + U\Psi = E\Psi$	$\int_\infty^\infty \lvert\Psi\rvert^2 dx = 1$	$\Psi(x) = A\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$	$E_n = \left(\frac{h^2}{8mL^2}\right)n^2$
$K = \gamma mc^2 - mc^2$			