Gabarito da P1

Física IV

Escola Politécnica - 2002

FAP2296 - 1^a PROVA

10 de setembro de 2002

♢ Esta prova tem 100 minutos de duração.

♢ É proibida a consulta a colegas, livros e apontamentos.

♢ Escreva de forma legível.

♢ É proibido o uso de calculadoras.

♢ Resolva cada questão na folha apropriada.

♢ Não serão aceitas respostas sem justificativas

Questão 1

Uma onda eletromagnética plana propagando-se no vácuo na direção do eixo x tem apenas a componente y do campo elétrico e a componente z do campo magnético. Essas componentes satisfazem as equações de Maxwell

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}, \qquad \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t},$$

onde ϵ_0 é a permissividade do vácuo e μ_0 a permeabilidade do vácuo.

(1,0 ponto) (a) A partir das equações de Maxwell acima obtenha a equação de onda satisfeita pela componente y do campo elétrico.

(1,5 pontos) (b) No instante $t = 0$ o campo elétrico é dado por

$$E_y(x, t = 0) = E_0 \,\mathrm{sen} k\, x$$

onde E_0 e k são constantes. Sabendo-se que a onda se propaga no sentido *negativo* do eixo x, escreva a expressão de E_y para qualquer tempo t. Mostre que essa expressão satisfaz a equação de onda obtida no item (a).

Solução da questão 1

a) Derivando-se a primeira equação em relação a x e usando a segunda,

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial B_z}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(-\epsilon_0\mu_0\frac{\partial E_y}{\partial t}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2},$$

onde $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ é a velocidade da luz no vácuo.

b) Para uma onda se propagando no sentido negativo do eixo x, com velocidade c,

$$E_y(x, t) = E_y(x + ct, 0) = E_0 \,\mathrm{sen}[k(x + c\,t)]$$

Calculando-se a derivada segunda em relação a x obtemos

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = k\, E_0 \cos[k(x + c\,t)], \qquad \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -k^2\, E_y(x, t),$$

enquanto a derivada segunda em relação a t é

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = k\, c\, E_0 \cos[k(x + c\,t)], \qquad \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = -(k\, c)^2\, E_y(x, t).$$

Portanto

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2},$$

Questão 2

Considere uma onda eletromagnética plana que se propaga no vácuo com campo elétrico dado por $\vec{E}(x, t) = E_0\, \cos(k\, x - \omega\, t)\; \hat{e}_y$.

(1,0 ponto) (a) Escreva a expressão do campo magnético correspondente.

(1,0 ponto) (b) Calcule o vetor de Poynting $\vec{S}$.

(0,5 pontos) (c) Suponha que essa onda incide normalmente sobre um disco, de raio R, *perfeitamente absorvedor*. Calcule a pressão de radiação exercida sobre o disco.

Solução da questão 2

a) $\vec{B} = \frac{1}{c}\,\hat{k} \times \vec{E} = \frac{E_0}{c}\,\cos(k\,x - \omega\,t)\hat{e}_z$

b) $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\,\vec{E} \times \vec{B} = \frac{E_0^2}{\mu_0\,c}\cos^2(k\,x - \omega\,t)\,\hat{e}_x = c\,\epsilon_0\,E_0^2\,\cos^2(k\,x - \omega\,t)\,\hat{e}_x$

c) A pressão de radiação é dada por

$$P_{\text{rad}} = \frac{\langle S \rangle}{c} = \langle \cos^2(k\,x - \omega\,t) \rangle\, c\,\epsilon_0\,E_0^2 = \frac{1}{2}\,c\,\epsilon_0\,E_0^2$$

Questão 3

Uma onda eletromagnética plana, monocromática e harmônica, se propagando num meio 1, de permissividade dielétrica ϵ_1 e permeabilidade magnética μ_0, incide normalmente sobre uma superfície plana de um meio 2, de permissividade dielétrica ϵ_2 e permeabilidade magnética μ_0. A amplitude da onda incidente é $\vec{E}_{0i} = E_{0i}\,\hat{e}_y$ e o vetor de onda é $\vec{k_1} = k_1\,\hat{e}_x$.

(0,5 pontos) (a) Suponha que, em $t = 0$ e $x = 0$ (sobre a interface), o campo elétrico incidente se anule. Escreva a expressão do campo incidente $\vec{E}_i(x,t)$.

(1,0 ponto) (b) Enuncie as condições de contorno para $\vec{E}$ e $\vec{B}$ na interface entre os dois meios.

(0,5 pontos) (c) Faça um diagrama mostrando os vetores $\vec{E}$, $\vec{B}$ e $\vec{k}$ das ondas incidente, refletida e transmitida.

(0,5 pontos) (d) Considere dadas as amplitudes E_{0i} (onda incidente) e E_{0t} (onda refletida). Calcule a fração da potência transmitida através da interface.

Solução da questão 3

a) Onda plana monocromática e harmônica que se anula em $t = 0$ e $x = 0$:

$$\vec{E}_i(\vec{r}, t) = E_{0i}\text{sen}(k_i\, x - \omega\, t)\, \hat{e}_y; \;\; \omega = \frac{k_i\, c}{n_1} = \frac{k_i}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_1}}$$

b) Na interface ($x = 0$, y e z quaisquer), os campos satisfazem as seguintes condições

$$\epsilon_1\, E_1^{\perp} = \epsilon_2\, E_t^{\perp}; \;\; \vec{E}_1^{||} = \vec{E}_t^{||}; \;\; B_1^{\perp} = B_t^{\perp}; \;\; \frac{1}{\mu_1}\vec{B}_1^{||} = \frac{1}{\mu_2}\vec{B}_t^{||}$$

onde $\vec{E}_1$ e $\vec{B}_1$ são as superposições dos campos incidente e refletido. Ou seja,

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r \;\; e \;\; \vec{B}_1 = \vec{B}_i + \vec{B}_r$$

c) Solução mostrada na figura .

Figura 1: Questão 3

d)

$$T \equiv \frac{I_t}{I_i} = \frac{v_2\, \epsilon_2\, (E_{0t})^2}{v_1\, \epsilon_1\, (E_{0i})^2} = \frac{v_2\, \mu_0 \epsilon_2\, (E_{0t})^2}{v_1\, \mu_0 \epsilon_1\, (E_{0i})^2} = \frac{v_1\, (E_{0t})^2}{v_2\, (E_{0i})^2} = \frac{n_2\, (E_{0t})^2}{n_1\, (E_{0i})^2}$$

Desenvolvimento extra

Usando as condições de contorno na interface, bem como $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, obtemos

$$\begin{cases} E_{0i} + E_{0r} & = & E_{0t} \\ \frac{1}{v_1} E_{0i} - \frac{1}{v_1} E_{0r} & = & \frac{1}{v_2} E_{0t} \end{cases}$$

ou (multiplicando a segunda equação por c)

$$\begin{cases} E_{0i} + E_{0r} & = & E_{0t} \\ n_1 E_{0i} - n_1 E_{0r} & = & n_2 E_{0t} \end{cases}$$

Eliminando E_{0r},

$$E_{0t} = \frac{2\,n_1}{n_1 + n_2}\,E_{0i}$$

Substituindo em T,

$$T = \frac{n_2}{n_1}\frac{4\,n_1^2}{(n_1+n_2)^2} = \frac{4\,n_1\,n_2}{(n_1+n_2)^2}$$

Questão 4

Considere dois meios de índices de refração n_1 e n_2 $(n_1 > n_2)$ separados por uma interface plana. Suponha que um raio luminoso parta do ponto P no meio 1 e atinja o ponto Q no meio 2, de acordo com a figura abaixo.

(1,0 ponto) (a) Calcule o tempo de trânsito que o raio leva para ir de P até Q em função dos parâmetros a, x, b, d, indicados na figura, dos índices de refração n_1 e n_2 e da velocidade da luz no vácuo, c.

(0,5 pontos) (b) Use o Princípio de Fermat para *deduzir* a relação entre os ângulos θ_1 e θ_2 da figura.

(0,5 pontos) (c) Calcule o ângulo de incidência mínimo, θ_c, a partir do qual haverá reflexão total.

(0,5 pontos) (d) Considere agora que o raio de luz parta do ponto Q no meio 2 para atingir um ponto P no meio 1. Existe algum ângulo θ_2 tal que haja reflexão total? Justifique.

Solução de questão 4

a)

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}}{v_2} = \frac{1}{c}\left(n_1\sqrt{x^2 + a^2} + n_2\sqrt{(d-x)^2 + b^2}\right)$$

b) A trajetória (e portanto o tempo) varia quando x varia. Uma *condição necessária* para que o Princípio de Fermat (mínimo tempo) seja satisfeito é

$$\frac{dt(x)}{dx} = 0.$$

Ou seja,

$$\frac{d}{dx}\left(n_1\sqrt{x^2 + a^2} + n_2\sqrt{(d-x)^2 + b^2}\right) = n_1\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - n_2\frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}}$$

Pela geometria da figura,

$$n_1\text{sen}\theta_1 - n_2\text{sen}\theta_2 = 0.$$

O que nos leva à "Lei de Snell"

$$n_1\text{sen}\theta_1 = n_2\text{sen}\theta_2$$

c) Reflexão total ocorre para $\theta_2 \geq \pi/2$. Logo, o ângulo de incidência crítico é tal que sen$\theta_c = \frac{n_2}{n_1}$. Ou seja,

$$\theta_c = \text{arcsen}(\frac{n_2}{n_1})$$

d) Neste caso, o seno do ângulo crítico seria maior do que um ($n_1/n_2 > 1$), o que é impossível.

Formulário

$$\vec{\nabla} \cdot \epsilon \vec{E} = \rho \quad ; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{\nabla} \times \frac{\vec{B}}{\mu} = \vec{J} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega} = \frac{1}{v} \hat{k} \times \vec{E} \quad ; \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B}; \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x,t) = 0$$

$$< S > = \frac{1}{2} v \, \epsilon \, E_0^2 \quad \text{(onda plana monocromática)} \quad ; \quad \frac{dU}{dt} = \int \vec{S} \cdot d\vec{A}$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m} \quad ; \quad \mu_0 = 1,26 \times 10^{-6} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$$

$$n = \frac{c}{v} \quad ; \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \quad ; \quad c = 3 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$P_{\text{rad}}^{\text{abs. total}} = \frac{< S >}{c} \quad ; \quad P_{\text{rad}}^{\text{refl. total}} = 2 \frac{< S >}{c}$$