AS

Física IV

Escola Politécnica - 2002

FAP2296 - AVALIAÇÃO Substitutiva

03 de dezembro de 2002

♢ Esta avaliação tem 100 minutos de duração.

♢ É proibida a consulta a colegas, livros e apontamentos.

♢ Escreva de forma legível.

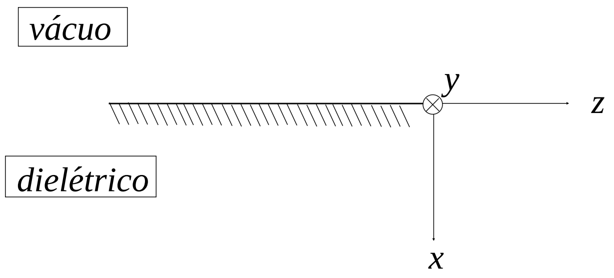
♢ É proibido o uso de calculadoras.

♢ Resolva cada questão na folha apropriada.

♢ Não serão aceitas respostas sem justificativas

Questão 1

Considere uma onda eletromagnética plana, harmônica e monocromática, propagando-se no vácuo (ϵ_0 e μ_0 são a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética do vácuo), caracterizada pelos vetores: $\vec{E}_i = E_i\,\hat{z}$; $\vec{B}_i = B_i\,(-\hat{y})$ e $\vec{k}_i = k\,\hat{x}$ (ver figura). A amplitude do campo elétrico da onda é E_{0i}. Ela incide perpendicularmente numa interface de um meio dielétrico possuindo permissividade dielétrica $\epsilon > \epsilon_0$ e permeabilidade magnética μ_0.



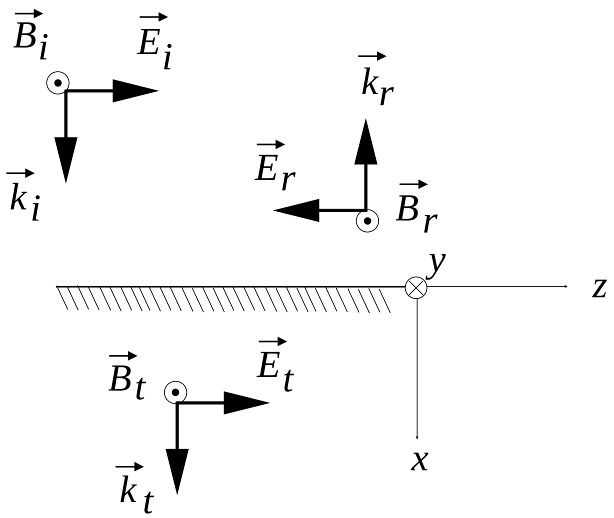
(0,5 ponto) (a) Reproduza a figura na folha de prova e represente as três ondas incidente, refletida e refratada, justificando sua escolha de direção e sentido dos vetores.

(1,0 ponto) (b) Suponha que em $t = 0$ e $x = 0$ o campo elétrico da onda incidente seja máximo. Escreva $\vec{E}_i(x,t)$ e $\vec{B}_i(x,t)$ e os vetores $\vec{E}_t(x,t)$ e $\vec{B}_t(x,t)$ da onda transmitida.

(1,0 ponto) (c) Que fração da energia incidente é transmitida?

Solução da Questão 1

$\vec{E}_i = E_i\,\hat{z}$; $\vec{B}_i = B_i\,(-\hat{y})$; $\vec{k}_i = k\,\hat{x}$;



(a)

(b) 1) Para $\epsilon > \epsilon_0$ há inversão de fase de $\vec{E}$ na reflexão.

2) Não há inversão de fase na refração.

3) O vetor de Poynting $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ define a direção e o sentido de $\vec{B}$.

Em geral uma onda plana propagando-se na direção $\hat{z}$ é dada por $\vec{E}_i(\vec{x}, t) = E_{0i} \cos(k_i\, x - \omega\, t + \delta)\, \hat{z}$. A fase δ é determinada pela condição dada no problema segundo a qual a amplitude é máxima em $x = 0$ e $t = 0$, de tal modo que $\vec{E}_i(0, 0) = E_{0i} = E_{0i} \cos(\delta)\, \hat{z}$, ou seja, $\delta = 0$. Logo,

$$\vec{E}_i(\vec{x}, t) = E_{0i} \cos(k_i\, x - \omega\, t)\, \hat{z}.$$

Este campo é solução da equação de onda com a condição de que $(k_i)^2 = \omega^2/v^2$, onde $v = c$ é a velocidade de propagação no vácuo. O campo magnético incidente é

$$\vec{B}_i(\vec{x}, t) = -\frac{E_{0i}}{c} \cos(k_i\, x - \omega\, t)\, \hat{y}.$$

Usando as ocndições de continuidade da componente tangencial de $\vec{E}$ e de $\vec{H}$ na interface e levando em conta a inversão de fase do campo refletido, teremos as seguintes relações

$$E_{0i} - E_{0r} = E_{0t}$$

$$\frac{E_{0i}}{c} + \frac{E_{0r}}{c} = \frac{E_{0t}}{v} = n\, \frac{E_{0t}}{c},$$

Eliminando E_{0r} das duas equações, teremos

$$E_{0t} = \frac{2}{n+1}\, E_{0i},$$

onde $n \equiv c/v = c\sqrt{\mu\epsilon} = c\sqrt{\mu_0\epsilon} = \frac{\sqrt{\mu_0\epsilon}}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}}$. Portanto, os campos transmitidos são

$$\vec{E}_t(\vec{x}, t) = \frac{2\, E_{0i}}{n+1} \cos(k_t\, x - \omega\, t)\, \hat{z}$$

e

$$\vec{B}_t(\vec{x}, t) = \frac{2\, E_{0i}}{(n+1)\, c} \cos(k_t\, x - \omega\, t)\, (-\hat{y}),$$

onde $k_t = \omega/v = k_i/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}\, \sqrt{\mu_0\epsilon} = k_i\, \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}}$.

(c) Os fluxos de energia incidente e transmitido são

$$S_i = E_i\, H_i = E_i\, \frac{B_i}{\mu_0} = \frac{E_{0i}^{\;2}}{\mu_0 c}\, \cos^2(k_i x - \omega t);$$

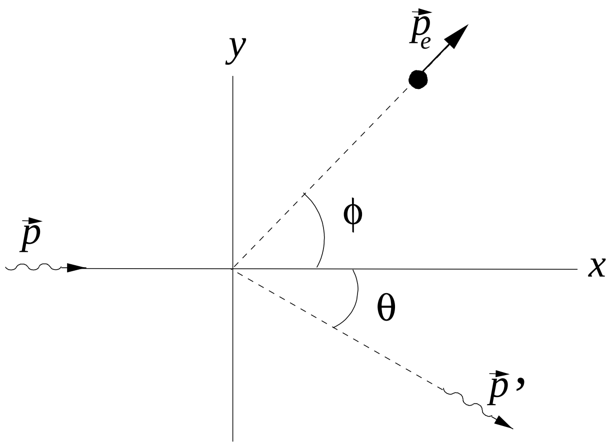
$$S_t = E_t\, H_t = E_t\, \frac{B_t}{\mu_0} = \frac{E_t^2}{\mu_0 v} = \frac{E_{0i}^{\;2}}{\mu_0 v} \frac{4}{(n+1)^2}\, \cos^2(k_i x - \omega t).$$

Tomando as médias temporais $\langle S \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_0^T S \mathrm{d}t$, teremos

$$\frac{\langle S_t \rangle}{\langle S_i \rangle} = \frac{1}{\mu_0 v} \frac{4}{(n+1)^2} \mu_0 c = \frac{4\, n}{(n+1)^2}$$

Questão 2

Um fóton possuindo quantidade de movimento (em módulo) p colide com um elétron livre em repouso no referencial do laboratório. O elétron emerge da colisão com quantidade de movimento (em módulo) p_e e o fóton com quantidade de movimento (em módulo) $p\,'$, nas direções indicadas na figura:



Dados: Massa de repouso do elétron m_{e0}; c; h.

(0,5 ponto) (a) Diga quais são as leis de conservação envolvidas neste problema e escreva as equações correspondentes.

(1,0 ponto) (b) No caso em que $\vec{p}\,' = \frac{1}{2} p\,' \hat{x} - \frac{\sqrt{3}}{2} p\,' \hat{y}$, qual o comprimento de onda do fóton espalhado?

(1,0 ponto) (c) Supondo que o fóton espalhado incida sobre a superfície de uma metal de função de trabalho ϕ e que haja a produção de foto-elétrons com energia cinética praticamente nula (limiar de emissão), escreva a relação entre p (do fóton incidente no elétron livre) e ϕ. Dê sua resposta em termos de h, c e λ_C.

Solução da Questão 2

(a) O momentum e a energia são conservados. As equações correspondentes são:

$$\vec{p} = \vec{p}\,' + \vec{p}_e$$

$$m_0\, c^2 + p\, c = p\,'\, c + \left[p_e^2\, c^2 + m_0^2 c^4\right]^{1/2}$$

(b) Como

$$\vec{p}\,' = p\,'\, \cos\theta\, \hat{x} + p\,'\, \text{sen}\theta\, \hat{y},$$

então $\cos\theta = 1/2$. Logo,

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_C\,(1 - \cos\theta) = \lambda_C\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\lambda_C}{2}.$$

Portanto,

$$\lambda' = \frac{\lambda_C}{2} + \frac{h}{p}.$$

(c)

$$h\,\nu = \phi = h\frac{c}{\lambda'}.$$

Substituindo o valor de λ' e resolvendo para p, obtemos

$$p = \frac{2h\phi}{2hc - \lambda_C\phi}$$

Questão 3A

Um elétron de um átomo de hidrogênio tem os seguintes números quânticos: $n = 2,\ \ell = 1,\ m_\ell = -1,\ m_s = 1/2$. Sabendo que a energia de ionização do átomo de hidrogênio é $13,6\, eV$,

(0,5 ponto) (a) Quanto vale a energia desse elétron?

(0,5 ponto) (b) Quanto vale o módulo do momento angular orbital ($|\vec{L}|$) e sua componente L_z?

(0,5 ponto) (c) Quanto vale o módulo do momento angular de spin ($|\vec{S}|$) e sua componente S_z?

Questão 3B

A função de onda normalizada de um elétron num átomo de hidrogênio, em seu estado de menor energia, é dada por $\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} \mathrm{e}^{-r/a_0}$, onde $a_0 = 0,053\, nm$ é o raio de Bohr.

(0,5 ponto) (d) Esboce um gráfico da função densidade de probabilidade radial desse elétron em função da coordenada r

(0,5 ponto) (e) Determine o valor mais provável da posição radial do elétron nesse estado.

Solução da Questão 3

(a)

$$E_2 = -\frac{13,6}{n^2} = -\frac{13,6}{2^2} = -3,4\, eV$$

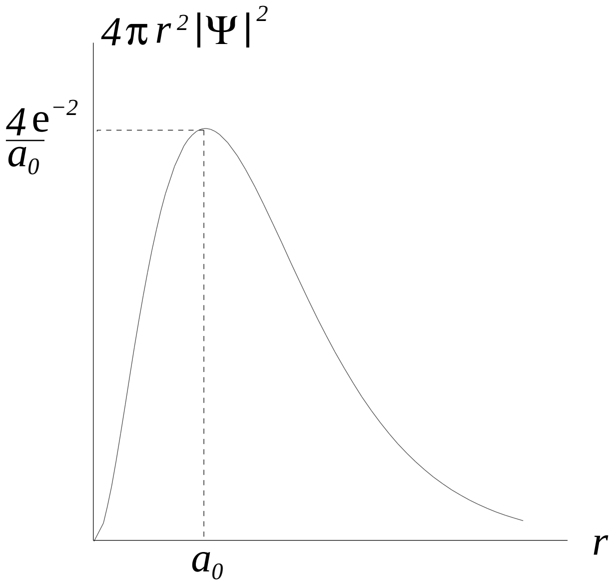
(b)

$$|\vec{L}| = \hbar\, \sqrt{\ell(\ell+1)} = \hbar\, \sqrt{2(2+1)} = \hbar\sqrt{2}$$

$$L_z = m_\ell\, \hbar = -\hbar$$

(c)

$$|\vec{S}| = \hbar\,\sqrt{s(s+1)} = \hbar\,\sqrt{1/2(1/2+1)} = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$$

(d) 

(e) Derivando a densidade radial $4\pi\,r^2|\psi|^2$ em relacão a r e igualando o resultado a zero,

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\,e^{-2r/a_0}\right) = 0$$

$$e^{-2r/a_0}\left(2r - \frac{2r^2}{a_0}\right) = e^{-2r/a_0}\,2\,r\left(1 - \frac{r}{a_0}\right) = 0.$$

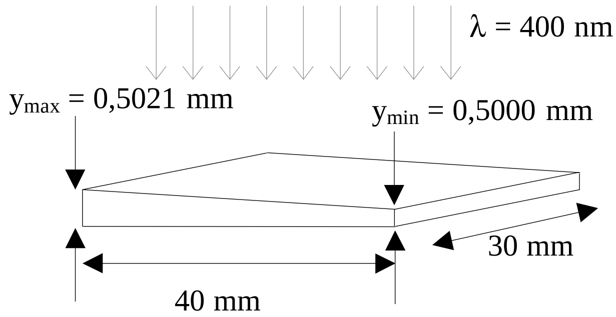
Portanto, $r = a_0$ é um extremo da densidade (a densidade é nula em $r = 0$). A derivada segunda resulta em

$$e^{-2r/a_0}\left(2 - \frac{8\,r}{a_0} + \frac{4\,r^2}{{a_0}^2}\right)$$

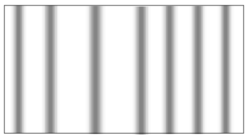
que é igual a -2 em $r = a_0$. Logo, $r = a_0$ é um *máximo* da distribuição.

Questão 4

Uma lâmina de quartzo (índice de refração $n = 1,5$) em forma de cunha foi encomendada a um fornecedor especializado. Na figura abaixo estão as dimensões do projeto.



A lâmina foi testada no ar com um feixe de luz monocromática com comprimento de onda $\lambda = 400\,nm$ incidindo verticalmente. Visto de cima, observou-se uma imagem com várias franjas paralelas, conforme o desenho abaixo



A distância máxima entre duas franjas consecutivas é $d_{\max} = 10\,mm$ enquanto que a distância mínima resultou $d_{\min} = 5,0\,mm$.

(1,0 ponto) (a) Qual a condição de interferência destrutiva da luz incidente para uma dada espessura da lâmina?

(1,0 ponto) (b) Determine o ângulo θ entre os planos superior e inferior, para as franjas mais próximas dessa cunha.

(0,5 ponto) (c) Que tipo de defeito apresenta a lâmina fornecida? Justifique.

Solução da Questão 4

(a) Condição de interferência destrutiva: $\Delta\phi_{\text{total}} = \phi_{1,2} + \phi_{2,1} + 2yk_n = (2m+1)\pi$, $m = 0, 1, 2, \cdots$.

$k_n = \dfrac{2\pi}{\lambda_n}$, $\lambda_n = \lambda/n = 267\,nm$, $\phi_{1,2} = 0$, $\phi_{2,1} = \pi$.

Substituindo, obtemos

$$y = \frac{m\,\lambda}{2\,n}$$

(b) Como $\theta \simeq \tan\theta$ teremos

$$\theta = \frac{\Delta y}{x} = \frac{\lambda}{2\,x\,n} = 2,7 \times 10^{-5}\mathrm{rd}$$

(c) A variação entre os espaçamentos das franjas indica que o ângulo entre as duas superfícies não é constante.

Dados: $\Delta\lambda \equiv \lambda' - \lambda_0 = \lambda_C\,(1 - \cos\theta)$ $m_{\mathrm{el.}} = 9,11 \times 10^{-31}\,kg,\ h = 6,63 \times 10^{-34}\,J \cdot s,$ $1\,eV = 1,6 \times 10^{-19}\,J,\ u = 931,5 MeV/c^2.$