PS

Física IV

Escola Politécnica - 2003

FAP2296 - GABARITO DA PS

9 de dezembro de 2003

Questão 1

Considere um circuito RLC alimentado por uma fonte de corrente alternada que fornece ao circuito um força eletromotriz dada por $V(t) = V_m sen(\omega t)$. A corrente neste circuito é dada por $I(t) = I_m sen(\omega t + \phi)$, onde ϕ é o fator de fase. Admita como dados V_m, I_m, ω, ϕ, R, L, C.

(1,0 ponto) (a) Utilizando os dados acima e as definições de voltagem média quadrática, $V_{mq} = V_m/\sqrt{2}$, e de corrente média quadrática, $I_{mq} = I_m/\sqrt{2}$, deduza a expressão para a potência média dissipada no circuito em função de V_{mq}, I_{mq} e ϕ.

(1,0 ponto) (b) Qual o valor da corrente média quadrática no circuito?

(0,5 ponto) (c) Para qual valor de ω a corrente média quadrática no circuito é máxima?

Dado: $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$

(a) Dados $V(t)$ e $I(t)$ calcula-se imediatamente $P(T)$:

$$\begin{aligned} P(t) &= V(t)I(t) = V_m sen(\omega t)\ I_m sen(\omega t + \phi) \\ &= V_m I_m sen(\omega t)[sen(\omega t)cos(\phi) + cos(\omega t)sen(\phi) \\ &= V_m I_m sen^2(\omega t)cos(\phi) + V_m I_m sen(\omega t)cos(\omega t)sen(\phi) \end{aligned}$$

A potência média é definida como a média de $P(t)$, ou seja,

$$P_{med} =< P(t) >= \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt = \frac{1}{2}V_m I_m cos(\phi)$$

na qual T é o período de oscilação de $P(t)$ e onde utilizamos o fato de que $< sen^2(\omega t) >= 1/2$ e $< sen(\omega t)cos(\omega t) >= 0$. Agora, basta utilizar as definições de V_{mq} e I_{mq} para obter

$$P_{med} = V_{mq} I_{mq} cos(\phi)$$

(b)

$$I_{mq} = \frac{V_{mq}}{Z} = \frac{V_{mq}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{V_{mq}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{V_{mq}}{\sqrt{2\left[R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2\right]}}$$

(c) I_{mq} tem seu máximo quando

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \Longrightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Questão 2

Luz com comprimento de onda $\lambda = 400\ nm$ incide numa rede de difração com $N = 1000$ fendas por centímetro, sendo, portanto, a separação entre as fendas $10^{-5}\ m$.

(1,0 ponto) (a) Determine a posição angular, em radianos, do primeiro máximo de interferência.

(1,0 ponto) (b) Deduza a expressão para o intervalo de frequência $\Delta\nu$ que pode ser resolvido por essa rede de difração para ordem $m = 2$ do máximo de interferência.

Dado: $R = Nm.$

(a)

$$dsen(\theta) = m\lambda \quad \text{para} \quad m = 1 \Longrightarrow \boxed{sen(\theta) = \frac{\lambda}{d}}$$

Para $d = 10^{-5}\ m$ e $\lambda = 400 \times 10^{-9}\ m$ obtemos

$$\boxed{sen(\theta) \approx \theta = 4 \times 10^{-2} \text{ radianos}}$$

(b)

$$R = Nm = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\nu}{\Delta\nu} \Longrightarrow \Delta\nu = \frac{\nu}{Nm} = \frac{c}{Nm\lambda}$$

Numericamente

$$\Delta\nu = \frac{3 \times 10^8}{10^3 \times 2 \times 400 \times 10^{-9}} \Leftrightarrow \boxed{\Delta\nu = \frac{3}{8} \times 10^{12} \text{ hertz}}$$

Questão 3

Uma célula fotelétrica, com um sensor cuja função de trabalho é $\phi_w = 2,3\ eV$ é iluminada com duas radiações monocromáticas, cada uma delas com a mesma intensidade I_0 e, respectivamente, comprimentos de onda $\lambda_1 = 450\ nm$ e $\lambda_2 = 500\ nm$.

(1,0 ponto) (a) Determine a freqüência de corte ν_c para a emissão fotelétrica pela célula.

(1,0 ponto) (b) Determine a energia cinética máxima K_{max} dos elétrons emitidos como conseqüência da radiação com $\lambda_1 = 450\ nm$. Expresse a sua resposta em eV.

(0,5 ponto) (c) Calcule o valor numérico para a relação N_1/N_2 entre a quantidade de fótons por unidade de área e por unidade de tempo que incide na célula fotelétrica (N_1 diz respeito à radiação com $\lambda_1 = 450\ nm$ e N_2 é relativo à radiação com $\lambda_2 = 500\ nm$.

(0,5 ponto) (d) Se cada fóton (de $450\ nm$ ou $500\ nm$) que atinge a célula fotelétrica tem a mesma probabilidade de arrancar um elétron, qual será a relação I_1/I_2 entre as correntes fotelétricas máximas para estes dois comprimentos de onda?

Dados: $h \approx 6,6 \times 10^{-34} J \cdot s$, $1J \approx 6,2 \times 10^{18}\ eV$ (dê suas respostas com dois algarismos significativos).

(a)

$$\nu_c = \frac{\phi_w}{h} = \frac{2,3 \times 1,6 \times 10^{-19}}{6,6 \times 10^{-34}} = 0,56 \times 10^{15}\ Hz$$

(b)

$$\lambda_1 = 450\ nm \rightarrow h\nu_1 = \frac{hc}{\lambda_1} = 4,4 \times 10^{-19}\ J = 2,7\ eV$$

Logo

$$\boxed{K_{max} = h\nu - \phi_w = 0,45\ eV}$$

(c)

$$\left.\begin{matrix} I_0 = N_1 h\nu_1 \\ I_0 = N_2 h\nu_2 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{450}{500}$$

$$\boxed{N_1 \,/\, N_2 = 9 \,/\, 10}$$

(d)

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{9}{10}$$

Questão 4

Considere uma partícula de massa m_0 que orbita numa trajetória circular em torno de um centro de força para o qual é atraída com uma força $F = -Kr$, onde r é o raio da órbita circular. A energia potencial associada a esta força é dada por $U = (1/2)Kr^2$.

(1,0 ponto) (a) Determine a expressão para a energia total da partícula (cinética + potencial) em função apenas do raio r da órbita e da constante K.

(1,0 ponto) (b) O momento angular desta partícula, $L = mvr$, é quantizado segundo a regra de Bohr, $L = n\hbar$. Determine os raios das órbitas possíveis em função apenas de n, $\hbar$, K e m_0.

(0,5 ponto) (c) Determine os níveis de energia do sistema e a energia dos fótons emitidos quando a partícula faz uma transição entre os dois níves de energia consecutivos (de n para $n-1$).

(a) A energia total é dada por

$$E_t = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{1}{2} K r^2$$

No movimento circular

$$\frac{m_0 v^2}{r} = K r$$

$$\Longrightarrow m_0 v^2 = K r^2 \ \text{ e } \ \boxed{E_t = K r^2}$$

(b) O momento angular é quantizado

$$L = m_0 v r = n\hbar \Longrightarrow m_0^2 v^2 r^2 = n^2 \hbar^2$$

No item (a) mostramos que

$$v^2 = \frac{K r^2}{m_0} \Longrightarrow m_0 K r^4 = n^2 \hbar^2 \Longrightarrow \boxed{r^2 = \frac{n\hbar}{\sqrt{m_0 K}}}$$

(c) Mostramos no item (a) que

$$E_t = K r_n^2 \Longrightarrow \boxed{E_n = \sqrt{\frac{K}{m_0}} n\hbar}$$

Portanto,

$$E_n - E_{n-1} = \sqrt{\frac{K}{m_0}}\, \hbar$$

é a energia do fóton emitido para quaisquer dois níveis consecutivos.