P1

Física IV

Escola Politécnica - 2003

FAP2296 - GABARITO DA P1

16 de setembro de 2003

◇ Esta avaliação tem 100 minutos de duração.

◇ É proibida a consulta a colegas, livros e apontamentos.

◇ Escreva de forma legível.

◇ É proibido o uso de calculadoras.

◇ Resolva cada questão na folha apropriada.

◇ Não serão aceitas respostas sem justificativas

Questão 1

Um capacitor (C), um resistor (R) e um gerador com voltagem $V(t) = V_m cos(\omega t)$, estão ligados em série.

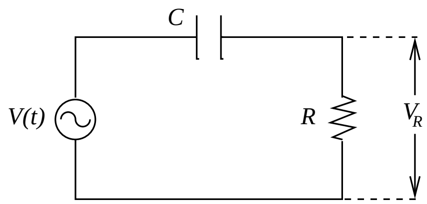
(1,0 ponto) (a) Calcule a impedância Z e a corrente máxima I_m do circuito.

(0,5 ponto) (b) Sendo $I(t) = I_m cos(\omega t + \phi)$ a corrente no circuito, calcule a fase ϕ.

(0,5 ponto) (c) Calcule a potência média dissipada no circuito.

Dado: para um circuito RLC em série a impedância é

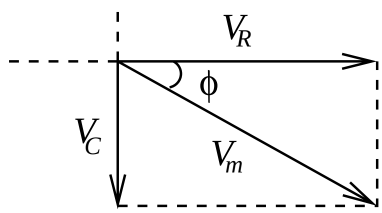
$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}\,.$$



(a) Num circuito RC, $L = 0$ e

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$I_m = \frac{V_m}{Z} = \frac{V_m \, \omega \, C}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$



(b) A fase ϕ é dada por

$$tg\phi = -\frac{V_C}{V_R} = -\frac{I_m X_C}{I_m R} = -\frac{1}{\omega C R}$$

$$\phi = -arctg\left(\frac{1}{\omega RC}\right)$$

(c) A potência instantânea é dada por

$$P(t) = I(t)V(t) = I_m cos(\omega t + \phi) V_m cos(\omega t)$$

$$\Longrightarrow \; < P(t) >= \frac{1}{2} I_m V_m cos(\phi) = I_{mq} V_{mq} cos(\phi) \; .$$

Como

$$cos(\phi) = \frac{V_R}{V_m} = \frac{I_m R}{V_m} \; ,$$

podemos também escrever

$$< P(t) >= \frac{R I_m^2}{2} \; .$$

Questão 2

Uma onda eletromagnética se propaga no vácuo ao longo do eixo x, com o campo elétrico $\vec{E}(x,t)$ ao longo do eixo y dado por:

$$\vec{E}(x,t) = E_m cos(kx - wt) \, \vec{\jmath} \, .$$

(0,5 ponto) (a) Se $\omega = 2\pi \times 10^{11} s^{-1}$, calcule o comprimento de onda λ.

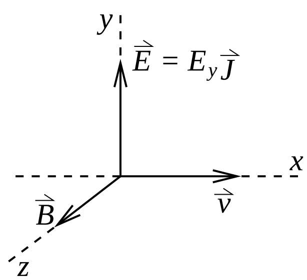
(1,0 ponto) (b) Determine a expressão completa do campo $\vec{B}$, em função de E_m, k, ω e c.

(1,0 ponto) (c) Calcule o vetor de Poynting $\vec{S}(x,t)$ e a intensidade média de radiação I.

(0,5 ponto) (d) Escreva a equação de onda unidimensional para o campo elétrico. Obtenha, a partir desta equação de onda, a relação entre k, ω e c.

(a) $\omega = 2\pi \times 10^{11} s^{-1} \Longrightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = 10^{11} Hz$

$\lambda = \frac{c}{f} \Longrightarrow \lambda = \frac{3\times 10^8}{10^{11}} = 3 \times 10^{-3}\ m$



(b) Os campos $\vec{E}$, $\vec{B}$ e a direção de propagação $\vec{\imath}$ são perpendiculares entre si.

$$\vec{v} \times \vec{E} = v^2 \vec{B} \quad e \quad v = c$$

$$\Longrightarrow \ c\vec{B} = \vec{\imath} \times E_y \vec{\jmath} = E_y \vec{k}$$

$$\Longrightarrow \vec{B}(x,t) = \frac{1}{c} E_y(x,t)\vec{k} = \frac{E_m}{c} cos(kx - wt)\vec{k}$$

(c) O vetor de Poynting é igual a

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0}(\ E_y\,\vec{\jmath}\,) \times (\ \frac{E_y}{c}\,\vec{k}\ ) = \frac{1}{c\mu_0} E_y^2\,\vec{\imath}$$

$$\Longrightarrow \frac{E_m^2}{c\mu_0} cos^2(kx - \omega t)\vec{\imath}$$

$$\Longrightarrow I = < S > = \frac{E_m^2}{2c\mu_0}$$

(d) E_y satisfaz a equação de onda

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

Definindo $\phi \equiv kx - \omega t$ temos

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -E_m k sen(\phi) \quad e \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -E_m k^2 cos(\phi)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = -E_m \omega sen(\phi) \quad e \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = -E_m \omega^2 cos(\phi)$$

Substituindo na equação de onda obtemos

$$E_m(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2})\,cos(\phi) = 0 \Longrightarrow \omega = kc$$

Questão 3

Uma onda eletromagnética plana no vácuo tem intensidade média $1000\, W/m^2$. Uma placa plana retangular, de $50\, cm \times 70\, cm$, está colocada perpendicularmente à direção da onda plana. Se a placa absorve toda a energia incidente, calcule:

(1,0 ponto) (a) o valor máximo da amplitude E_m do campo elétrico da onda,

(1,0 ponto) (b) a energia total U absorvida pela placa durante 2 minutos,

(0,5 ponto) (c) a pressão exercida pela radiação sobre a placa.

(a) A amplitude máxima do campo está ligada à intensidade da onda.

$$I = \frac{1}{2c\mu_0} E_m^2 \ \ , \ \ I = 10^3 \frac{W}{m^2}$$

$$\Longrightarrow \ E_m = \sqrt{2\mu_0 c I} = \sqrt{6 \times 10^{11} \mu_0} = \sqrt{24\pi} \times 10^2 \ \frac{V}{m}$$

(b) A energia total absorvida é dada por

$$U = I A \Delta t \ \ , \ \ A = 0,35 m^2 \ \ , \ \ \Delta t = 120 s$$

$$\Longrightarrow U = 4,2 \times 10^4 J$$

(c)A pressão sobre a placa é

$$P = \frac{< S >}{c} = \frac{I}{c} = \frac{1}{3} \times 10^{-5} \frac{N}{m^2}$$

Questão 4

Luz monocromática de comprimento de onda $\lambda = 400\, nm$, proveniente do vácuo (meio 1), incide normalmente sobre um meio dielétrico com $\epsilon_2 = 2\epsilon_0$ e $\mu_2 = \mu_1 = \mu_0$.

(1,0 ponto) (a) Qual é o índice de refração n_2 do meio 2 e o comprimento de onda da luz neste meio?

(1,5 ponto) (b) Uma parcela da onda incidente (E_0, B_0) é refletida (E_r, B_r) e outra (E_t, B_t) é transmitida para o meio 2. Essas ondas obedecem às seguintes condições de contorno no plano de separação entre os meios 1 e 2:

$$E_0 - E_r = E_t \quad e \quad H_0 + H_r = H_t \ .$$

Calcule a intensidade do campo elétrico refletido (E_r) e a do campo elétrico transmitido (E_t) em função de E_0 e dos índices de refração n_1 e n_2.

<u>Dado</u>: $\vec{B} = \mu \vec{H}$; $\vec{E} = \vec{B} \times \vec{v}$.

(a) Usando $\epsilon_2 = 2\epsilon_0$ e $\mu_2 = \mu_0$, calculamos o índice de refração do meio 2

$$n_2 = \frac{c}{v_2} = \frac{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{2}$$

Os comprimentos de onda são dados por

$$\lambda_1 = cT \ \ , \ \ \lambda_2 = v_2 T \Longrightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{v_2}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \lambda_2 = \frac{4 \times 10^{-7}}{\sqrt{2}} m$$

(b) No plano de separação entre os meios 1 e 2

$$E_0 - E_r = E_t \tag{1}$$

$$H_0 + H_r = H_t \tag{2}$$

Podemos relacionar E e H

$$B = \mu H \ \ e \ \ B = \frac{E}{v} \Longrightarrow \sqrt{\epsilon} E = \sqrt{\mu} H$$

Substituindo na Eq. (2) e levando em conta que $\mu_2 = \mu_1 = \mu_0$ obtemos

$$E_0 + E_r = \frac{\sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1}} E_t = \frac{n_2}{n_1} E_t \tag{3}$$

Das Eqs. (1) e (3) obtemos

$$E_r = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right) E_0 \ \ e \ \ E_t = \left(\frac{2n_1}{n_2 + n_1} \right) E_0$$

Finalmente, colocando $n_1 = 1$ e $n_2 = \sqrt{2}$ chegamos a

$$E_r = \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right) E_0 \ \ e \ \ E_t = \left(\frac{2}{\sqrt{2} + 1} \right) E_0$$