P3

Física IV

Escola Politécnica - 2003

FAP2296 - GABARITO DA P3

2 de dezembro de 2003

♢ Esta avaliação tem 100 minutos de duração.

♢ É proibida a consulta a colegas, livros e apontamentos.

♢ Escreva de forma legível.

♢ É proibido o uso de calculadoras.

♢ Resolva cada questão na folha apropriada.

♢ Não serão aceitas respostas sem justificativas

Questão 1

Considere o modelo de Bohr onde o elétron percorre uma trajetória circular de raio r e o momento angular é quantizado, ou seja $L = n\hbar$. Usando a mecânica clássica e a quantização do momento angular mostre que:

(0,5 ponto) (a) a velocidade v é quantizada;

(1,0 ponto) (b) o raio da órbita é quantizado;

(1,0 ponto) (c) a soma da energia cinética com a energia potencial é quantizada.

(a) Movimento circular uniforme:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\, r^2} = \frac{mv^2}{r} \Longrightarrow \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = (mvr)\, v = Lv$$

$$\Longrightarrow v = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\, L} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\, \hbar\, n}$$

(b) Usando a quantização do momento angular e os resultados do item (a) obtemos

$$mvr = \hbar n \Longrightarrow r = \frac{\hbar n}{mv} = \frac{\hbar n}{m}\frac{4\pi\epsilon_0\, \hbar\, n}{e^2}$$

$$\Longrightarrow r = \frac{4\pi\epsilon_0\, \hbar^2\, n^2}{me^2}$$

(c) Substituindo os resultados dos itens (a) e (b) na expressão da energia chegamos a

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\ r} = -\frac{1}{2}\frac{me^2}{(4\pi\epsilon_0)^2\hbar^2}\frac{1}{n^2}$$

$\boxed{\textbf{Questão 2}}$

Considere um átomo hidrogenóide, constituido por um núcleo com carga Ze e apenas um elétron na eletrosfera. O modelo de Bohr para o átomo de H também aplica-se a um átomo hidrogenóide, de modo que os níveis de energia daquele átomo são dados por:

$$E_n = -13,6\, \frac{Z^2}{n^2}\ \ (eV), \quad \text{onde} \ \ n = 1, 2, 3, ...$$

(1,0 ponto) (a) Mostre que a diferença de energia entre dois níveis consecutivos tende a zero, para números quânticos principais crescentes.

(1,0 ponto) (b) Considere um átomo hidrogenóide com $Z = 2$, em repouso, no primeiro estado excitado. Um fóton colide com esse átomo, transferindo sua energia, levando-o ao segundo estado excitado. Qual é o comprimento de onda desse fóton? Dê sua resposta com dois algarismos significativos.

(1,0 ponto) (c) Considere agora dois átomos hidrogenóides, um com $Z = 2$ e outro com $Z = 3$, próximos, de modo que possam trocar fótons devido a mudanças em seus níveis de energia. Se o átomo com $Z = 3$ decai do nível com $n_i = 9$ para outro com $n_f = 6$ por meio da emissão de um fóton, este fóton poderá ser absorvido pelo átomo com $Z = 2$? Em caso afirmativo, quais são os níveis do átomo com $Z = 2$ envolvidos nessa transição? Justifique sua resposta.

Dados: $h \approx 6,6 \times 10^{-34} J \cdot s$, $1\ J \approx 6,2 \times 10^{18}\ eV$, $1\ eV \approx 1,6 \times 10^{-19}\ J$, $c \approx 3,0 \times 10^8\ m/s$.

(a) A diferença de energia entre os níveis n e $n - 1$ é

$$\Delta E = E_n - E_{n-1} = -13.6\, Z^2 \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n-1)^2}\right] = 13.6\, Z^2\, \frac{2n-1}{n^2(n-1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \Delta E = \lim_{n\to\infty} \left(13.6\, Z^2\, \frac{2}{n^3}\right) = 0$$

(b) O primeiro estado excitado tem $n = 2$ e o segundo $n = 3$, portanto

$$\Delta E = -(13.6)\,(2^2)\,\left[\frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^2}\right] = 7.6\ eV$$

A energia do fóton é igual a ΔE e seu comprimento de onda

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{hc}{hf} = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{(6.6 \times 10^{-34})(3.0 \times 10^8)}{(7.6)(1.6 \times 10^{-19})} = 1.6 \times 10^{-7} m\ .$$

(c) As diferenças de energia para os átomos com $Z = 3$ e $Z = 4$ são dadas por

$$\Delta E_{Z=3} = (13.6)\,(3^2)\,\left(\frac{1}{6^2} - \frac{1}{9^2}\right) \quad \text{e} \quad \Delta E_{Z=2} = (13.6)\,(2^2)\,\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2}\right)$$

$$\Delta E_{Z=3} = \Delta E_{Z=2} \Longrightarrow 3^2\left(\frac{1}{6^2} - \frac{1}{9^2}\right) = 2^2\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2}\right)$$

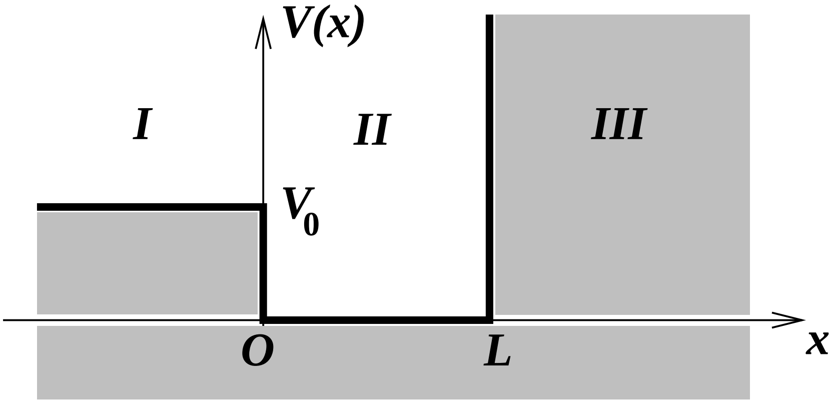
$$\frac{1}{(2\times 6)^2} - \frac{1}{(2\times 9)^2} = \frac{1}{(3n_i)^2} - \frac{1}{(3n_f)^2}$$

$$\frac{1}{(12)^2} - \frac{1}{(18)^2} = \frac{1}{(3n_i)^2} - \frac{1}{(3n_f)^2}$$

Assim, o átomo com $Z = 2$ pode absorver o fóton se ele passar de $n_i = 4$ para $n_f = 6$.

Questão 3

Uma partícula de massa m está confinada a um poço de potencial no qual a parede localizada em $x \geq L$ tem altura infinita (energia potencial $V \to \infty$) e aquela em $x \leq L$ tem altura V_0, conforme a figura:



(0,5 ponto) (a) Escreva a equação de Schrödinger independente do tempo para essa partícula, considerando que $\psi(x)$ é a sua função de onda e E a sua energia.

(1,0 ponto) (b) Considere agora que a partícula possui energia total $0 < E < V_0$. Escreva as soluções $\psi(x)$ nas três regiões I, II, e III representadas na figura.

(1,0 ponto) (c) Escreva as equações das condições de contorno para $\psi(x)$ em $x = 0$ e $x = L$ que permitem a obtenção das constantes presentes nas soluções $\psi(x)$ em cada uma das regiões da figura. (Obs: Não é necessário resolver essas equações.)

(a) Equação de Schrödinger independente do tempo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+V\psi=E\psi$$

(b) Nas regiões I, II e III as funções de onda são dadas respectivamente por:

$$(I) \qquad \psi_I(x)=Ae^{-\beta x}\,,\ \text{onde} \quad \beta=\left[\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}\right]^{1/2}$$

$$(II) \qquad \psi_{II}(x)=Be^{i\alpha x}+Ce^{-i\alpha x}\,,\ \text{onde} \quad \alpha=\left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right)^{1/2}$$

$$(III) \qquad \psi_{III}(x)=0$$

(c) Devemos impor a continuidade de ψ em $x=0$ e $x=L$ e a continuidade $d\psi/dx$ em $x=L$.

$$\psi_I(0)=\psi_{II}(0)\Longrightarrow \boxed{A=B+C}$$

$$\psi_{II}(L)=0\Longrightarrow \boxed{Be^{i\alpha L}+C^{-i\alpha L}=0}$$

$$\frac{d\psi_I}{dx}=\psi_I'(x)=-A\beta e^{-\beta x}$$

$$\frac{d\psi_{II}}{dx}=\psi_{II}'(x)=i\alpha Be^{i\alpha x}-i\alpha Ce^{-i\alpha x}$$

$$\psi_I'(L)=\psi_{II}'(L)\Longrightarrow \boxed{-A\beta=i\alpha B-i\alpha\, C}$$

Questão 4

Considere o átomo de flúor (F) que possui $Z=9$.

(1,0 ponto) (a) Escreva a configuração eletrônica desse elemento com seus números quânticos n, ℓ, m_ℓ e m_s para cada elétron.

(1,0 ponto) (b) Calcule o módulo do momento angular orbital (L) e sua projeção sobre o eixo z (L_z) para cada um dos elétrons do átomo de F.

(a) A configuração eletrônica do F é $1s^2 \;\; 2s^2 \;\; 2p^5$. Os elétrons têm os números quânticos:

$$
\begin{aligned}
1s^2 &\;:\; n = 1,\;\; \ell = 0,\;\; m_\ell = 0 \;\text{ e }\; m_s = \pm 1/2 \\
2s^2 &\;:\; n = 2,\;\; \ell = 0,\;\; m_\ell = 0 \;\text{ e }\; m_s = \pm 1/2 \\
2p^2 &\;:\; n = 2,\;\; \ell = 1,\;\; m_\ell = -1 \;\text{ e }\; m_s = \pm 1/2 \\
2p^2 &\;:\; n = 2,\;\; \ell = 1,\;\; m_\ell = 0 \;\text{ e }\; m_s = \pm 1/2 \\
2p^1 &\;:\; n = 2,\;\; \ell = 1,\;\; m_\ell = 1 \;\text{ e }\; m_s = 1/2
\end{aligned}
$$

(b) Os valores de $L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar$ e $L_z = m_\ell \hbar$ são os seguintes:

$$
\begin{aligned}
1s^2 &\;:\quad \ell = 0 \Longrightarrow L = 0;\;\; m_\ell = 0;\;\; L_z = 0 \\
2s^2 &\;:\quad \ell = 0 \Longrightarrow L = 0;\;\; m_\ell = 0;\;\; L_z = 0 \\
2p^5 &\;:\quad \ell = 1 \Longrightarrow L = \sqrt{2}\hbar;\;\; m_\ell = -1, 0, 1;\;\; L_z = -\hbar, 0, \hbar
\end{aligned}
$$