P1

Física IV

Escola Politécnica - 2004

FAP 2204 - GABARITO DA P1

14 de setembro de 2004

Questão 1

Um circuito RLC em série é usado em um rádio para sintonizar uma estação de FM de freqüência f_0. A resistência do circuito é R, a indutância é L e a capacitância é C. A estação emite um sinal que é recebido pelo circuito com uma voltagem $V(t) = V_m \text{sen}(\omega t)$.

(0.5 ponto) (a) Quais são as reatâncias do capacitor e do indutor e qual é a impedância (Z) do circuito?

(0.5 ponto) (b) Sendo I_m a corrente de pico no circuito, quais são as quedas de potencial na resistência (V_R), no indutor (V_L) e no capacitor (V_C)?

(1.0 ponto) (c) A expressão da corrente que passa pelo circuito tem a forma $I(t) = I_m \text{sen}(\omega t - \phi)$. Determine I_m e ϕ utilizando o diagrama de fasores **ou** o método dos números complexos.

(0.5 ponto) (d) Sabendo que $L = 2\mu H$, qual deve ser a capacitância C para sintonizar a rádio FM se $f_0 = 100\,MHz$?

Solução

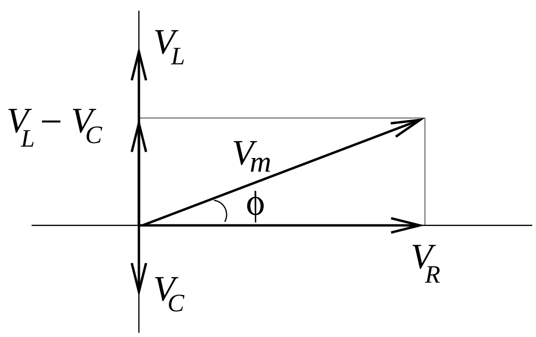
(a) A reatância indutiva, a reatância capacitiva e a impedância são

$$X_L = \omega L\ , \quad X_C = \frac{1}{\omega C}\ , \quad Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

(b) As quedas de potencial na resistência, no indutor e no capacitor são

$$V_R = RI_m\ , \quad V_L = X_L I_m\ , \quad V_C = X_C I_m$$

(c) Usando o diagrama de fasores obtemos:



$$V_m = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2}$$
$$= I_m\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = I_m Z$$
$$\Longrightarrow \boxed{I_m = \frac{V_m}{Z}}$$

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{X_L - X_C}{R} \Longrightarrow \boxed{\phi = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right)}$$

(d) A potência média $P_{média} \sim 1/Z$, onde $\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$. Há ressonância quando $X_L = X_C$.

$$\Longrightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C} \Longrightarrow \boxed{C = \frac{1}{\omega^2 L}}$$

Assim,

$$C = \frac{1}{(2\pi \times 10^8)^2 (2 \times 10^{-6})} = \frac{10^{-10}}{8\pi^2}$$

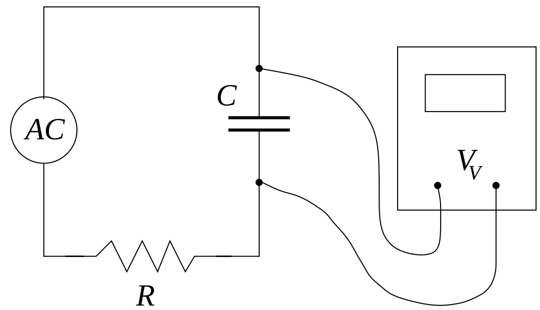
$$\Longrightarrow \boxed{C = 1,3\,pF}$$

Questão 2

Um circuito RC série foi conectado a uma fonte de tensão alternada com freqüência variável dada por

$$V = V_0 \mathrm{sen}(\omega t)$$

Um voltímetro comum foi conectado aos terminais do capacitor como mostra a figura.



(0,5 ponto) (a) Escreva a impedância do circuito em função de ω.

(1,0 ponto) (b) Escreva a corrente $I(t)$ no circuito.

(1,0 ponto) (c) Calcule a tensão lida no voltímetro V_V e esboce o seu gráfico em função da freqüência angular ω. Lembre que o voltímetro mede a voltagem média quadrática.

Solução

(a) A impedância do circuito é

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

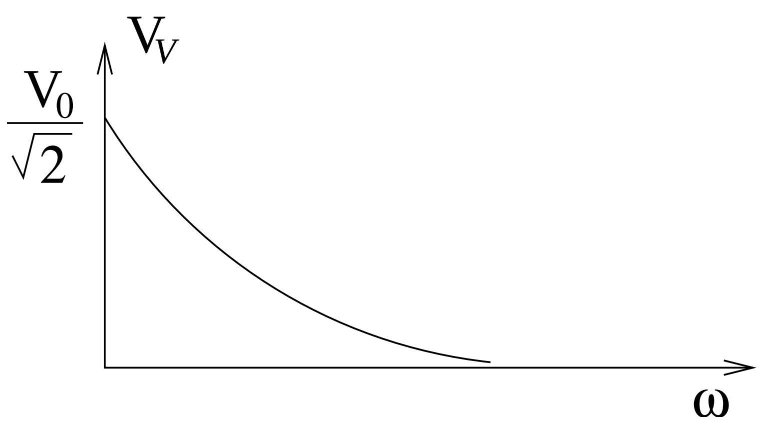
(b) A corrente é dada por

$$I(t) = I_m \,\mathrm{sen}(\omega t - \phi) \;, \quad I_m = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \;, \quad \phi = -\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{1}{\omega C R}\right)$$

(c) A voltagem no voltímetro é igual à voltagem quadrática média no capacitor

$$V_V = \frac{V_{0\,C}}{\sqrt{2}} \;, \quad V_{0\,C} = X_C \, I_m = \frac{1}{\omega C} \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\Longrightarrow V_V = \frac{V_0}{\sqrt{2}\sqrt{\omega^2 C^2 R^2 + 1}}$$



$\boxed{\text{Questão 3}}$

Uma onda eletromagnética se propaga no vácuo com velocidade $c = 3 \times 10^8 m/s$, ao longo do eixo x. O campo magnético $\vec{B}(x,t)$, que se está no plano xz, é dado por $\vec{B}(x,t) = B_m \cos(kx - \omega t)\vec{k}$.

(0,5 ponto) (a) Se o comprimento de onda $\lambda = 3 \times 10^{-3} m$, calcule a freqüência angular ω da onda.

(1,0 ponto) (b) Mostre qual é a relação que deve haver entre k, ω e c para que $B_z(x,t)$ obedeça a uma equação de onda.

(1,0 ponto) (c) Determine o vetor campo elétrico $\vec{E}(x,t)$ associado ao campo $\vec{B}(x,t)$.

Solução

(a) A freqüência angular ω é dada por

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi c}{\lambda} = \frac{2\pi(3\times 10^8)}{3\times 10^{-3}} = 2\pi 10^{11} s^{-1}$$

$$\boxed{\omega = 2\pi 10^{11} s^{-1}}$$

(b) Utilizaremos a equação de onda e a expressão de $B_z(x,t)$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} \\ B_z(x,t) = B_m \cos(kx - \omega t) \end{cases}$$

Substituindo

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = -k^2 B_m \cos(kx-\omega t)\ , \quad \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = -\omega^2 B_m \cos(kx - \omega t)$$

na equação de onda obtemos

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \Longrightarrow \boxed{\omega = k\ c}$$

(c) A relação entre $\vec{B}$ e $\vec{E}$ é dada pela equação de Maxwell

$$\mathrm{rot}(\vec{B}) = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{com} \quad \vec{B}(x,t) = B_m\cos(kx-\omega t)\vec{k}$$

$$\mathrm{rot}(\vec{B}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & 0 & B_z \end{vmatrix} = -\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\vec{\jmath} = B_m \,\mathrm{sen}(kx-\omega t)\vec{\jmath}$$

Assim, podemos escrever

$$\mu_0\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0\epsilon_0\left(\frac{\partial E_y}{\partial t}\right)\vec{\jmath} = B_m\,\mathrm{sen}(kx-\omega t)\vec{\jmath}$$

$$\Longrightarrow E_y(x,t) = \frac{kB_m}{\mu_0\epsilon_0}\int \mathrm{sen}(kx-\omega t)dt = \frac{kB_m}{\omega\mu_0\epsilon_0}\cos(kx-\omega t) = c\ B_m\cos(kx-\omega t)$$

$$\Longrightarrow \boxed{E_y(x,t) = cB_z(x,t) \quad \text{e} \quad E_m = cB_m}$$

Questão 4

Um laser de hélio–neônio, com potência P_0, emite um feixe de luz monocromática com uma secção reta circular de área A.

(1,0 ponto) (a) Calcule o vetor de Poynting médio $< |\vec{S}| > \equiv < S >$ e os campos elétrico E_m e magnético B_m máximos do feixe. Expresse seus resultados em termos de P_0, A, μ_0 e c.

(0,5 ponto) (b) Qual é a energia média total eletromagnética contida em um feixe de comprimento L ?

(1,0 ponto) (c) Qual é o momento p transferido pela luz do laser ao incidir, durante um intervalo de tempo Δt, perpendicularmente sobre um anteparo que absorve totalmente a radiação ?

Solução

(a) O módulo do vetor de Poynting é

$$S(t) = \frac{E^2(t)}{\mu_0 c} \Longrightarrow \boxed{< S >= \frac{E_m^2}{2\mu_0 c}}$$

$$P_0 =< S > A = \frac{E_m^2}{2\mu_0 c} A$$

$$\Longrightarrow \boxed{E_m = \sqrt{\frac{2\mu_0 c P_0}{A}}} \quad \text{e} \quad \boxed{B_m = \frac{E_m}{c}}$$

(b) A densidade de energia é dada por

$$< u_{total} >=< u_e > + < u_m >= 2 < u_e >= \frac{\epsilon_0 \, E_m^2}{2}$$

A energia dentro do cilindro de comprimento L e secção A é

$$\Longrightarrow \boxed{U_{total}(L) = \frac{\epsilon_0 \, E_m^2}{2} \, L \, A}$$

(c) O momento é dado por

$$p = \frac{U_{incidente}}{c} \quad \text{onde} \quad U_{incidente} =< S > A \, \Delta t = P_0 \, \Delta t$$

$$\Longrightarrow \boxed{p = \frac{P_0 \, \Delta t}{c}}$$