P2

Física IV

Escola Politécnica - 2004

FAP 2204 - GABARITO DA P2

26 de outubro de 2004

Questão 1

A distância entre dois faróis de um veículo é $d = 1,4\,\text{m}$. Suponha que estes faróis emitam luz monocromática de comprimento de onda $\lambda = 550\,\text{nm}$. O veículo se aproxima de um observador cuja pupila tem um diâmetro $a = 5,0\,\text{mm}$. Seu olhos são preenchidos com um líquido cujo índice de refração é $n = 1,1$. A resolução com que esse observador pode distinguir os dois faróis é determinada pelos efeitos de difração da luz de cada farol no olho do observador. Nessa situação responda:

(1,0 ponto) (a) Qual o comprimento de onda λ_p da luz dos faróis no interior dos olhos do observador? Justifique sua resposta.

(1,5 ponto) (b) Qual a distância máxima r entre a pupila e os faróis tal que o observador consegue distingui-los separadamente?

Dado: Lei de Snell $\underline{sen\,\theta_i = n\; sen\,\theta_r}$.

Solução

(a) A freqüência ν e o comprimento de onda λ, no vácuo, estão relacionados, através de c: $\nu = c/\lambda$. Para o vácuo $n = 1$ e quando a luz passa a se propagar num meio com $n > 1$ a sua velocidade passa a ser $v = c/n$ e a freqüência deve permanecer inalterada; para isso devemos ter um novo comprimento de onda λ' tal que a freqüência seja mantida:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{v}{\lambda'} = \frac{c}{n\lambda'} \Rightarrow \lambda' = \frac{\lambda}{n} \; .$$

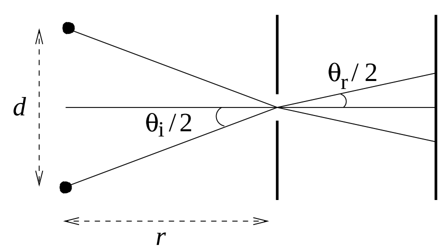
Assim, dentro do globo ocular do observador

$$\lambda' = \frac{550 \text{ nm}}{1,1} = 500 \text{ nm} \; .$$

(b) Considerando a pupila um orifício circular através do qual a luz proveniente dos faróis é difratada, temos:

$$\theta_r = 1,22 \, \frac{\lambda'}{a} = 1,22 \, \frac{500 \times 10^{-9} m}{5 \times 10^{-3} m} = 1,22 \times 10^{-4} \text{ rad} \; .$$

Mas este é o ângulo entre os rais já difratados. O ângulo θ_i entre os raios fora dos olhos é obtido com a lei de Snell.



$$sen(\frac{\theta_i}{2}) = n \; sen(\frac{\theta_r}{2})$$

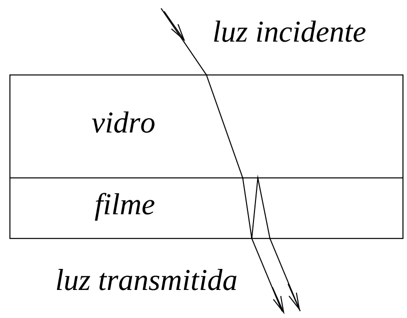
Uma vez que θ_i e $\theta_r << 1$ podemos fazer as aproximações:

$$\theta_i \approx n \; \theta_r$$

$$d \approx r \; \theta_i = r \; n \; \theta_r \Rightarrow r \approx \frac{d}{n \; \theta_r} = \frac{1,4}{1,1 \times 1,22 \times 10^{-4}} \approx 1,0 \times 10^4 m \; .$$

Questão 2

Uma placa de vidro cujo índice de refração é $1,4$ é revestida com uma película fina (filme) de um material possuindo índice de refração $1,5$. Luz verde de comprimento de onda $525 \times 10^{-9}\, m$, incidindo quase normalmente, é transmitida com interferência construtiva (veja a figura abaixo).



(1,0 ponto) (a) Calcule a espessura mínima do filme que produz este efeito.

(1,0 ponto) (b) Para que outros comprimentos de onda do espectro visível ($400\, nm < \lambda < 700\, nm$) haverá interferência construtiva quando a película tem a espessura de item (a)? Justifique.

(0,5 ponto) (c) Quais comprimentos de onda transmitidos do espectro visível sofrerão interferência destrutiva nas condições do item (a)?

Solução

(a) A condição de interferência construtiva (não há mudança de fase nas reflexões internas ao filme, uma vez que o índice de refração do filme é maior do que os índices de refração do ar e do vidro) é $2\,t\,n_{filme} = m\,\lambda$, onde t é a espessura do filme. A espessura mínima corresponde a $m = 1$. Logo,

$$t_{min} = \frac{525}{2 \times 1,5} = 175\,nm.$$

(b) Comprimentos de onda λ que seriam também preferencialmente transmitidos seriam

$$\lambda = \frac{2\,n_{filme}\,t_{min}}{\bar{m}} = \frac{525\,nm}{\bar{m}}; \quad \bar{m} = 2, 3, \cdots$$

($\bar{m} = 1$ corresponde à $\lambda = 525\,nm$). Para o menor valor $\bar{m} = 2$, o comprimento de onda já esta fora do espectro visível. Portanto, as outras partes do espectro visível não serão preferencialmente transmitidas.

(c) A condição de interferência destrutiva é $2\,t_{min}\,n_{filme} = (m+1/2)\lambda$ ($m = 0, 1, 2, \cdots$). Portanto,

$$\lambda = \frac{2\,n_{filme}\,t}{m + 1/2}.$$

Para $m = 0$, $\lambda = 1050\,nm$, para $m = 1$, $\lambda = 350\,nm$. Assim, não há interferência destrutiva para nenhum λ dentro do espectro visível.

Questão 3

Radiação de comprimento de onda λ_0 incide sobre uma superfície metálica. O potencial frenador dos foto-elétrons é V_0.

(0,5 ponto) (a) Determine a energia cinética máxima dos elétrons emitidos.

(1,0 ponto) (b) Calcule a função trabalho do metal.

(1,0 ponto) (c) Obtenha o limiar de comprimento de onda λ_{max} do fóton.

Expresse todas as respostas em termos de λ_0, V_0, h e c.

Solução

(a) A energia cinética máxima é

$$K_{max} = e\,V_0.$$

(b) A função de trabalho ϕ é obtida de

$$K_{max} = e\,V_0 = \frac{hc}{\lambda_0} - \phi$$

$$\Longrightarrow \phi = \frac{hc}{\lambda_0} - e\,V_0$$

(c) No comprimento de onda limiar λ_{max}, a energia cinética dos elétrons é nula.

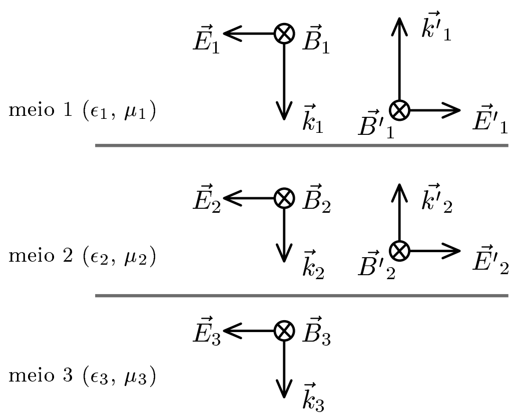
$$\Longrightarrow \frac{hc}{\lambda_{max}} - \phi = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{hc}{\lambda_{max}} = \phi = \frac{hc}{\lambda_0} - e\,V_0$$

$$\Longrightarrow \lambda_{max} = \frac{hc}{\frac{hc}{\lambda_0} - e\,V_0} = \lambda_0 \frac{1}{1 - (e\,V_0\,\lambda_0)/(hc)}$$

Questão 4

A figura abaixo mostra uma parte da região de fronteira entre três meios dielétricos distintos com suas respectivas permissividades elétricas e permeabilidades magnéticas. O *meio 1* estende-se infinitamente para cima e o *meio 3* estende-se infinitamente para baixo. Suponha que uma onda eletromagnética plana, cujo campo elétrico tem amplitude E_1, viaja através do *meio 1*, incidindo normalmente sobre a interface com o *meio 2*. Na figura está mostrada uma configuração instantânea dos campos elétricos e magnéticos resultantes incidentes e refletidos em cada um dos três meios dielétricos. Considere $\epsilon_1 < \epsilon_2 < \epsilon_3$ e $\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_3 \approx \mu_0$.



(0,5 ponto) (a) Escreva as condições de contorno, em termos apenas das amplitudes dos campos elétricos, para a fronteira entre o *meio 1* e o *meio 2*.

(1,0 ponto) (b) Escreva as condições de contorno, em termos apenas das amplitudes dos campos elétricos, para a fronteira entre o *meio 2* e o *meio 3*.

(1,0 ponto) (c) Calcule a intensidade do campo elétrico da onda eletromagnética refletida na fronteira entre o *meio 1* e o *meio 2* em função das constantes dadas e de E_1.

Solução

(a) Para a fronteira entre os meios 1 e 2 as condições de contorno são:

$$\vec{E}^{||}_{\text{meio 1}} = \vec{E}^{||}_{\text{meio 2}} \Rightarrow E_1 - E'_1 = E_2 - E'_2$$

$$\frac{\vec{B}^{||}_{\text{meio 1}}}{\mu_0} = \frac{\vec{B}^{||}_{\text{meio 2}}}{\mu_0} \Rightarrow \frac{B_1 + B'_1}{\mu_0} = \frac{B_2 + B'_2}{\mu_0} \Rightarrow \sqrt{\epsilon_1}\,(E_1 + E'_1) = \sqrt{\epsilon_2}\,(E_2 + E'_2)$$

(b) Já para a fronteira entre os meios 2 e 3 as condições de contorno são:

$$\vec{E}^{||}_{\text{meio 2}} = \vec{E}^{||}_{\text{meio 3}} \Rightarrow E_2 - E'_2 = E_3$$

$$\frac{\vec{B}^{||}_{\text{meio 2}}}{\mu_0} = \frac{\vec{B}^{||}_{\text{meio 3}}}{\mu_0} \Rightarrow \frac{B_2 + B'_2}{\mu_0} = \frac{B_3}{\mu_0} \Rightarrow \sqrt{\epsilon_2}(E_2 + E'_2) = \sqrt{\epsilon_3}\,E_3$$

(c) Reescremos as Eqs. dos itens (a) e (b) como

$$\begin{cases} E_1 - E'_1 = E_2 - E'_2 & (1)\\ \sqrt{\epsilon_1/\epsilon_2}\,(E_1 + E'_1) = E_2 + E'_2 & (2)\\ E_2 - E'_2 = E_3 & (3)\\ E_2 + E'_2 = \sqrt{\epsilon_3/\epsilon_2}\,E_3 & (4) \end{cases}$$

Substituindo a Eq. (3) na Eq. (1) e a Eq. (4) na Eq. (2) obtemos

$$\begin{cases} E_1 - E'_1 = E_3 \\ \sqrt{\epsilon_1/\epsilon_2}\,(E_1 + E'_1) = \sqrt{\epsilon_3/\epsilon_2}\,E_3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow E'_1 = \frac{\sqrt{\epsilon_3} - \sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_3} + \sqrt{\epsilon_1}}\,E_1$$