P3

Física IV

Escola Politécnica - 2004

FAP 2204 - GABARITO DA P3

7 de dezembro de 2004

Questão 1

Num átomo neutro no estado fundamental as camadas $n = 1$ e $n = 2$ estão totalmente preenchidas, além disto há três elétrons na camada $n = 3$.

(1,0 ponto) (a) Determine o número atômico Z.

(1,0 ponto) (b) Quais são os valores possíveis do módulo L do momento angular orbital e sua projeção sobre o eixo z para um elétron da subcamada $3p$?

(0,5 ponto) (c) Quais são os valores possíveis do módulo do momento angular do spin S e sua projeção S_z sobre o eixo z para o elétron do ítem (b)?

Solução

(a) Cada subcamada tem $2(2\ell + 1)$ elétrons.

n=1,	$\ell = 0$	$\rightarrow$	2	elétrons
n=2,	$\ell = 0$	$\rightarrow$	2	“
	$\ell = 1$	$\rightarrow$	6	“
n=3		$\rightarrow$	3	“
			---	
total			13	“

Assim, há 13 elétrons. Como o átomo é neutro, há também 13 prótons e $Z = 13$.

(b) Na subcamada $2p$, $\ell = 1$ assim

$$L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar = \sqrt{2}\hbar$$

$$L_z = m_\ell \, \hbar = -\hbar, 0, \hbar$$

(c) Lembrando que $s = 1/2$ podemos escrever

$$\begin{aligned} S = & \quad \sqrt{s(s+1)}\hbar & = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\hbar \\ S_z = & \quad m_z\hbar & = \pm\tfrac{1}{2}\hbar \end{aligned}$$

Questão 2

O hidrogênio muônico é formado quando um próton captura um múon que fica orbitando em volta dele. O múon é uma partícula com a mesma carga do elétron mas com massa 207 vezes maior. Este tipo de átomo pode ser interessante para gerar energia em processos de fusão nuclear.

(1,0 ponto) (a) Fazendo uma analogia com o modelo de Bohr para o hidrogênio comum, mas com o múon no lugar do elétron, mostre que a fórmula para os níveis de energia do hidrogênio muônico é $E_n = -2,8\ keV/n^2$.

(1,0 ponto) (b) Qual é o comprimento de onda dos fótons emitidos na transição do nível $n = 2$ para $n = 1$? Comparar com o hidrogênio comum.

(0,5 ponto) (c) Pode-se mostrar que no estado de energia n, ambos, o elétron do hidrogênio comum e o múon do hidrogênio muônico, têm a mesma velocidade. Neste caso, qual dos dois núcleos tem raio menor? Explique.

Dados: $\dfrac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} = 13,6eV$, $\quad h = 4,1 \times 10^{-15} eV \cdot s$

Solução

(a) Para o hidrogênio comum,

$$E_n^H = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2}\frac{1}{n^2} = -\frac{13,6eV}{n^2}$$

Substituindo-se m por $207m$ obtemos

$$E_n = -\frac{2,8keV}{n^2}$$

(b) Usando a expressão acima temos

$$E_2 - E_1 = -2,8keV\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2}\right) = 2,1keV$$

$$\Longrightarrow \lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{(4,1\times 10^{-15})(3\times 10^8)}{2,1\times 10^3} \approx 6\ \mathring{A}$$

(c) Em ambos os casos, a condição de quantização é $L = n\hbar$. Mas para o hidrogênio muônico $L = mvr = n\hbar$. Para n fixo, os v são iguais, assim o raio do hidrogênio muônico é 207 vezes menor do que o do hidrogênio comum.

Questão 3

Uma partícula de massa m está confinada em uma caixa unidimensional delimitada por paredes infinitamente altas entre $x = -a$ e $x = a$. O estado dessa partícula pode ser representada pela função de onda independente do tempo

$$\psi(x) = A\ \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right).$$

(1,0 ponto) (a) Escreva a equação de Schrödinger independente do tempo para a partícula na região $-a \leq x \leq a$ e determine o valor da energia E do estado associado a $\psi(x)$.

(0,5 ponto) (b) Usando a condição de normalização da função de onda, determine a constante A.

(1,0 ponto) (c) Se a incerteza máxima na determinação da posição da partícula for $2a$, qual é a menor incerteza na sua quantidade de movimento? Justifique sua resposta.

Dado :

$$\int \cos^2(bx)\ dx = \frac{x}{2} + \frac{\text{sen}(2bx)}{4b}$$

Solução

(a) A equação de Schrödinger em $-a \leq x \leq a$ é

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$$

Substituindo $\psi = A\ \cos(\pi x/2a)$ na equação acima tem-se

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{4a^2}A\cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) = EA\cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$$

$$\Rightarrow E = \frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2}$$

(b) A condição de normalização é

$$\int_{-a}^{a} |\psi|^2 dx = 1$$

$$\Rightarrow \int_{-a}^{a} A^2\cos^2\left(\frac{\pi x}{2a}\right) = 1 \Rightarrow A^2 a = 1$$

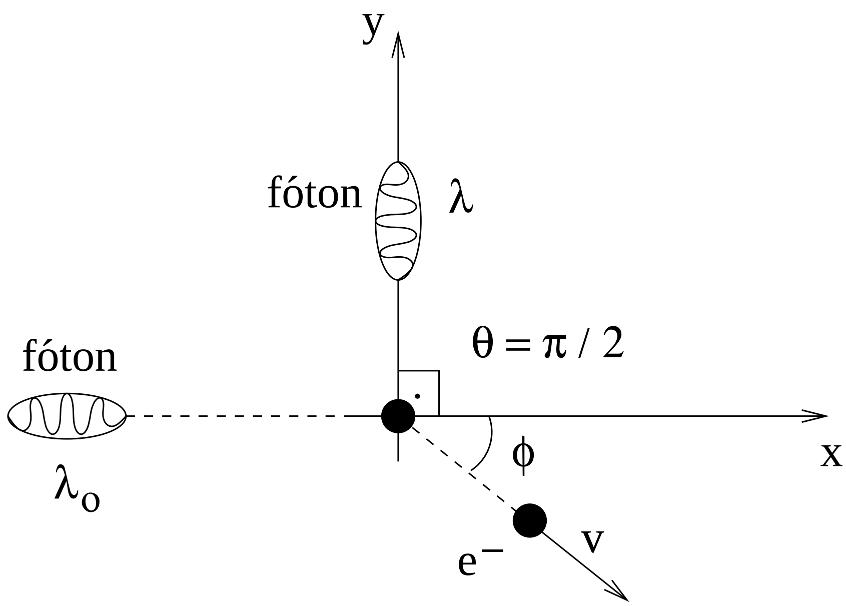
$$\Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

(c) Pela relação de incerteza de Heisenberg

$$\Delta x \Delta p \approx \hbar \Rightarrow \Delta p \approx \frac{\hbar}{2a}$$

Questão 4

Considere um fóton de comprimento de onda λ_0 que colide com um elétron estacionário (massa de repouso m_0). Observa-se que o fóton espalhado se propaga em uma direção ortogonal em relação à direção de incidência.



(1,0 ponto) (a) Escreva as equações de conservação que permitem a obtenção do deslocamento Compton $\Delta\lambda = (h/m_0 c)(1 - \cos\theta)$.

(1,0 ponto) (b) Qual é o ângulo de recuo do elétron ϕ (medido em relação à direção de incidência)? Dê sua resposta em função de h, λ_0, m_0 e c.

(0,5 ponto) (c) Obtenha a energia do elétron em função de h, λ_0, m_0, c e $\Delta\lambda$.

Solução

(a) Conservação da energia

$$h\frac{c}{\lambda_0} + m_0c^2 = h\frac{c}{\lambda} + m_0\gamma c^2 \ , \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Conservação das componentes x e y do momento

$$\frac{h}{\lambda_0} = m_0\gamma v \cos\phi$$

$$0 = \frac{h}{\lambda} - m_0\gamma v \,\mathrm{sen}\phi$$

(b) As equações de conservação do momento fornecem

$$\left.\begin{array}{r} m_0\gamma v \,\mathrm{sen}\phi = h/\lambda \\ m_0\gamma v \cos\phi = h/\lambda_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \tan\phi = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \Delta\lambda} \ ,$$

onde

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\frac{\pi}{2}) = \frac{h}{m_0c} \ .$$

(c) Usando a equação de conservação de energia obtemos

$$E = m_0\gamma c^2 = hc\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda}\right) + m_0c^2 = hc\,\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0\lambda} + m_0c^2$$

$$\Rightarrow E = hc\,\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0(\lambda_0 + \Delta\lambda)} + m_0c^2$$