P3

Física IV

Escola Politécnica - 2005

FAP 2204 - GABARITO DA P3

29 de novembro de 2005

Questão 1

A emitância espectral, ou intensidade espectral, da radiação de corpo negro é dada aproximadamente pela lei de Wien

$$I(\lambda, T) = \frac{A}{\lambda^5} \exp\left(-\frac{B}{\lambda T}\right),$$

onde T é a temperatura absoluta, e A e B são constantes positivas. Responda as questões abaixo admitindo-se a validade dessa lei para todo λ.

(a) (0,5 ponto) Diga quais devem ser as unidades de A e B, e esboce o gráfico de $I(\lambda, T)$ como função de λ.

(b) (1,0 ponto) Determine o valor do comprimento de onda λ_{max} para o qual a emitância espectral é máxima.

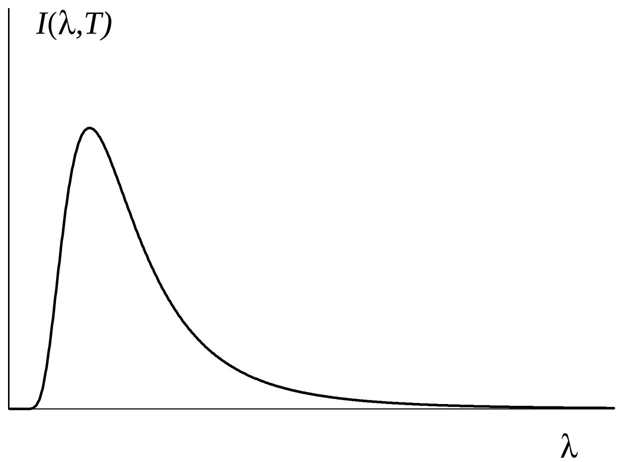
(c) (1,0 ponto) Determine a emitância total I do corpo negro. Dado:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = 1 \times 2 \times \cdots \times n = n!$$

Solução da questão 1

(a) A unidade da emitância espectral é W/m^3 e o argumento da exponencial é adimensional. Portanto,

$$[A] = \text{W}\cdot\text{m}^2, \qquad [B] = \text{m}\cdot\text{K}.$$



(b) O máximo da emitância espectral é determinada pela condição

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} I(\lambda, T) = \frac{A}{\lambda^6} e^{-B/\lambda T}\left(-5 + \frac{B}{T\lambda}\right) = 0. \qquad \text{Logo,} \quad \lambda_{\text{max}} = \frac{B}{5T}.$$

(c) A emitância total é dada por

$$I = \int_0^\infty I(\lambda, T)d\lambda = \int_0^\infty \frac{A}{\lambda^5} e^{-B/\lambda T} d\lambda$$

Chamando

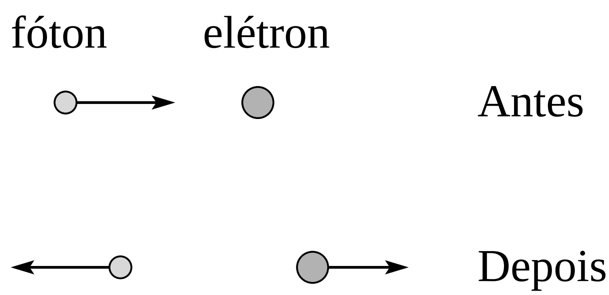
$$x = \frac{B}{\lambda T},$$

obtemos

$$I = \frac{AT^4}{B^4} \underbrace{\int_0^\infty x^3 e^{-x} dx}_{3!=6}. \qquad \text{Logo,} \quad I = \left(\frac{6A}{B^4}\right) T^4.$$

Questão 2

Num espalhamento Compton de um fóton por um elétron livre, o fóton é espalhado de 180° perdendo a metade da sua energia inicial.



As respostas às questões abaixo devem ser dadas em termos da massa de repouso do elétron m e constantes fundamentais como a constante de Planck h e a velocidade da luz c.

(a) (1,5 ponto) Determine o comprimento de onda λ, a energia E e o momento p do fóton incidente.

(b) (1,0 ponto) Determine a energia E_e e o momento p_e do elétron após a colisão.

Solução da questão 2

(a) O comprimento de onda do fóton espalhado é $\lambda' = 2\lambda$ e o ângulo de espalhamento é $\theta = 180°$. Da equação de Compton

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta),$$

obtemos para o comprimento de onda do fóton incidente

$$\lambda = \frac{2h}{mc}.$$

Portanto a energia e o momento do fóton incidente são

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1}{2}mc^2, \qquad p = \frac{h}{\lambda} = \frac{1}{2}mc.$$

(b) Pela lei de conservação da energia

$$E + mc^2 = E_e + E' = E_e + \frac{E}{2}.$$

Portanto,

$$E_e = \frac{E}{2} + mc^2 = \frac{5}{4}mc^2.$$

Da equação relativística

$$E_e^2 = p_e^2c^2 + m^2c^4,$$

obtemos o momento do elétron

$$p_e = \frac{3}{4}mc.$$

Questão 3

Considere uma partícula de massa m confinada numa caixa unidimensional cujos lados estão localizados em $x = a$ e $x = a + L$, onde a e L são positivos. O potencial é dado por

$$U(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } a < x < a + L, \\ \infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) (1,0 ponto) Escreva a equação de Schrödinger independente do tempo satisfeita por $\psi(x)$ para $a < x < a + L$, e obtenha a solução geral dessa equação.

(b) (1,5 ponto) Imponha condições de contorno pertinentes ao problema e determine as funções de onda e os níveis de energia. Não é preciso normalizar as funções de onda.

Solução da questão 3

(a) A equação de Schrödinger para $a < x < a + L$ é

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi, \qquad \text{ou} \qquad \frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2\psi, \quad \text{onde} \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}.$$

A solução geral é

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}.$$

(b) A condição de contorno $\psi(a) = Ae^{ika} + Be^{-ika} = 0$ fornece $B = -Ae^{2ika}$. Portanto

$$\psi(x) = Ae^{ika}\left[e^{ik(x-a)} - e^{-ik(x-a)}\right] = C\sin k(x-a), \qquad \text{onde} \qquad C = 2iAe^{ika}.$$

A condição de contorno $\psi(a+L) = 0$ implica

$$\psi(a+L) = C\sin kL = 0. \quad \text{Logo} \quad k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Portanto as funções de onda distintas são dadas por

$$\psi_n(x) = C\sin k_n(x-a) = C\sin\frac{n\pi}{L}(x-a), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

As energias correspondentes são

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = \frac{h^2n^2}{8mL^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Questão 4

Considere o átomo de neônio (Ne), com número atômico $Z = 10$.

(a) (1,0 ponto) Escreva a configuração eletrônica do Ne com seus números quânticos n, ℓ, m_ℓ e m_s para cada elétron.

(b) (1,0 ponto) Calcule o módulo do momento angular orbital (L) e sua projeção sobre o eixo z (L_z) para cada elétron do Ne.

(c) (0,5 ponto) Calcule o módulo do momento angular de spin (S) e sua projeção sobre o eixo z (S_z) para cada elétron do Ne.

Solução da questão 4

(a)

$$
\begin{array}{llllll}
1s^2 \ : & n=1\,, & \ell=0\,, & m_\ell=0 & e & m_s=\pm 1/2 \\
2s^2 \ : & n=2\,, & \ell=0\,, & m_\ell=0 & e & m_s=\pm 1/2 \\
2p^2 \ : & n=2\,, & \ell=1\,, & m_\ell=-1 & e & m_s=\pm 1/2 \\
2p^2 \ : & n=2\,, & \ell=1\,, & m_\ell=0 & e & m_s=\pm 1/2 \\
2p^2 \ : & n=2\,, & \ell=1\,, & m_\ell=1 & e & m_s=\pm 1/2
\end{array}
$$

(b)

$$L=\sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar \qquad \text{e} \qquad L_z=m_\ell\,\hbar$$

$$
\begin{array}{llllll}
1s^2 \ : & \ell=0 & \Longrightarrow & L=0\,; & m_\ell=0\,; & L_z=0 \\
2s^2 \ : & \ell=0 & \Longrightarrow & L=0\,; & m_\ell=0\,; & L_z=0 \\
2p^6 \ : & \ell=1 & \Longrightarrow & L=\sqrt{2}\,\hbar\,; & m_\ell=-1,0,1\,; & L_z=-\hbar,0,\hbar
\end{array}
$$

(c)

$$S=\sqrt{s(s+1)}\,\hbar \qquad \text{e} \qquad S_z=m_s\,\hbar$$

$$s=\frac{1}{2} \qquad \therefore \qquad S=\frac{\sqrt{3}}{2}\,\hbar \qquad \underline{\text{para todos}}$$

$$S_z=\pm\frac{1}{2}\,\hbar$$