P1

Física IV

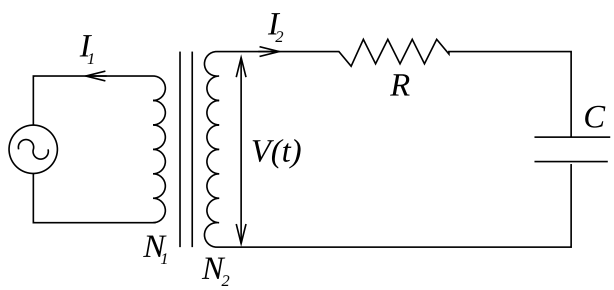
Escola Politécnica - 2005

FAP 2204 - GABARITO DA P1

13 de setembro de 2005

Questão 1

Uma fonte de tensão alternada está acoplada a um transformador ideal que por sua vez está conectado a um circutio RC em série, conforme a figura.



O enrolamento primário do transformador contém $N_1 = 200$ espiras, enquanto o secundário tem $N_2 = 1000$ espiras. A tensão obtida no ramo secundário é dada por $V(t) = V_M \text{sen}(\omega t)$. As respostas devem ser dadas como função de ω, R, C e V_M.

(0.5 ponto) (a) Obtenha a amplitude de tensão (V_{FM}) e a tensão quadrática média (tensão eficaz) V_{QM} da fonte.

(1.0 ponto) (b) Obtenha as amplitudes das correntes que percorrem o primário (I_1) e o secundário (I_2) do transformador.

(1.0 ponto) (c) Qual é a amplitude da tensão V_{CM} no capacitor?

Solução

(a)

$$V_{FM} = V_M \frac{N_1}{N_2} = \frac{V_M}{5} \quad ; \quad V_{QM} = \frac{V_{FM}}{\sqrt{2}} = \frac{V_M}{5\sqrt{2}}$$

(b)

$$I_2 = \frac{V_M}{Z} = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}}$$

$$V_{FM} I_1 = V_M I_2 \Longrightarrow I_1 = 5 I_2 = \frac{5 V_M}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}}$$

(c)

$$V_{CM} = I_2 X_C = \frac{V_M}{\omega C \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}}$$

Questão 2

Um circuito RLC em série é alimentado por uma fonte de tensão representada por $V(t) = V_0\mathrm{sen}(\omega_0 t)$, onde $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

(0,5 ponto) (a) Obtenha a amplitude, I_0, da corrente que percorre o circuito, bem como a defasagem, ϕ, entre a corrente e a tensão da fonte.

(0,5 ponto) (b) Obtenha a potência média $< P_R >$ dissipada pela resistência e, também, a potência média $< P_F >$ fornecida pela fonte.

(0,5 ponto) (c) Obtenha a expressão completa para a tensão $V_C(t)$ entre as placas do capacitor, como função do tempo.

O capacitor tem placas planas e paralelas, de área A e separadas por uma distância d, sendo a correspondente capacitância $C = \epsilon_0 A/d$. Desprezando efeitos de borda, o campo elétrico entre as placas do capacitor é dado por $E(t) = V_C(t)/d$.

(1,0 ponto) (d) Obtenha a densidade de corrente de deslocamento, $J_D(t)$, entre as placas do capacitor. Qual é a amplitude da corrente de deslocamento I_D?

Solução

(a)

$$\text{Para} \quad \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Longrightarrow X_L = X_C \Longrightarrow Z = R \quad \text{e} \quad I_0 = \frac{V_0}{R}$$

$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} = 0 \Longrightarrow \phi = 0$$

(b)

$$< P_R >= \frac{V_0 I_0}{2} = \frac{V_0^2}{2R} =< P_F > \qquad \text{(dissipada = fornecida)}$$

(c)

$$X_C = \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{d}{\omega_0 \epsilon_0 A} \Longrightarrow V_{C0} = I_0 X_C = \frac{V_0\, d}{R\omega_0\epsilon_0 A}$$

$$\text{Então,} \quad V_C(t) = V_{C0}\,\mathrm{sen}(\omega_0 t - \pi/2) = \frac{V_0\, d}{R\omega_0\epsilon_0 A}\,\mathrm{sen}(\omega_0 t - \pi/2)$$

(d)

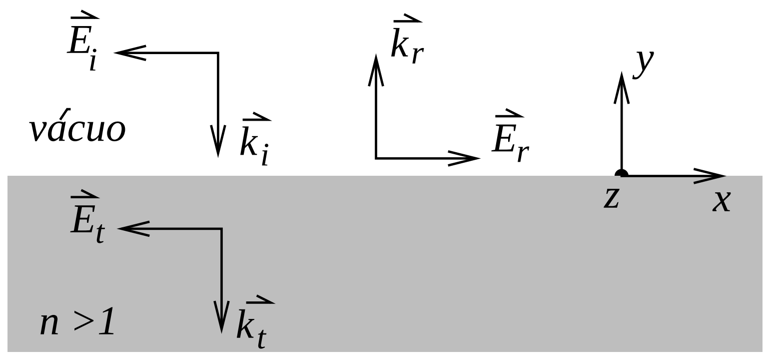
$$E(t) = \frac{V_0}{R\omega_0\epsilon_0 A}\,\mathrm{sen}(\omega_0 t - \pi/2)$$

$$J_D(t) = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{V_0}{RA}\cos(\omega_0 t - \pi/2) = \frac{V_0}{RA}\mathrm{sen}(\omega_0 t)$$

$$I_D = A\,\frac{V_0}{RA} = \frac{V_0}{R} = I_0$$

Questão 3

Uma onda eletromagnética plana harmônica, proveniente do vácuo, incide normalmente sobre um meio dielétrico de índice de refração $n > 1$. Adotando o sistema de referência da figura, o campo elétrico dessa onda é representado por $\vec{E}_i = E_{0i} \cos(-k_i y - \omega t + \phi)(-\vec{\imath})$. As respostas dos itens abaixo devem ser dadas como função apenas de E_{0i}, k_i, ϕ, n e c. Considere $\mu_{meio} \approx \mu_0$.



(1,0 ponto) (a) Escreva a expressão que representa o campo magnético incidente $\vec{B}_i$.

(0,5 ponto) (b) Obtenha a velocidade, freqüência, freqüência angular e comprimento de onda do campo transmitido.

(1,0 ponto) (c) Obtenha, através da aplicação adequada das condições de contorno, a amplitude do campo elétrico refletido, E_{0r}.

Solução

(a)

$$\vec{B}_i = \frac{E_{0i}}{c}\cos(-k_i y - \omega t + \phi)(-\hat{k}), \quad \text{com} \quad \omega = k_i c$$

(b)

$$v = \frac{c}{n} \quad ; \quad \omega = k_i c \quad ; \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{k_i c}{2\pi} \quad ; \quad \lambda_t = \frac{\lambda_i}{n} = \frac{2\pi}{n k_i}$$

(c)

$$E_{0i} - E_{0r} = E_{0t} \tag{1}$$

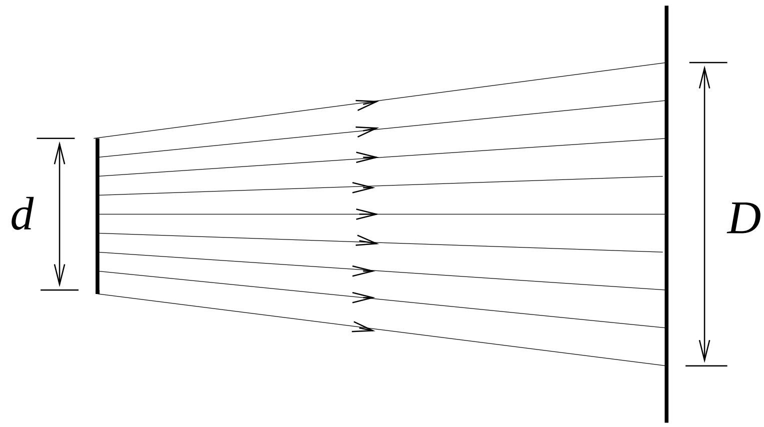
$$B_{0i} + B_{0r} = B_{0t} \Longrightarrow \frac{E_{0i}}{c} + \frac{E_{0r}}{c} = n\frac{E_{0t}}{c} \Longrightarrow$$

$$E_{0i} + E_{0r} = nE_{0t} \tag{2}$$

$$(1) \quad \text{em} \quad (2) \Longrightarrow E_{0r} = \frac{n-1}{n+1}\,E_{0i}$$

Questão 4

Um farol emite um feixe de seção reta circular, mas ligeiramente divergente de forma que se propaga de forma cônica, como ilustrado na figura.



O feixe é emitido com potência média P_0 e seção reta de diâmetro d, e atinge uma superfície totalmente absorvedora estando com seção reta de diâmetro D.

(1,0 ponto) (a) Obtenha a intensidade (vetor de Pointing) média $< S_e >$ do feixe na região em que é emitido e na região em que atinge a superfície absorvedora ($< S_a >$).

(0,5 ponto) (b) Obtenha a amplitude do campo elétrico nas mesmas regiões do item (a), respectivamente E_{0e} e E_{0a}.

(1,0 ponto) (c) Suponha, agora, que a divergência do feixe é pequena, de maneira que se pode considerar a incidência como sendo normal. Calcule a pressão de radiação média P exercida sobre a superfície absorvedora.

Solução

(a) $< S >= P_0/A$

$$\text{Onde é emitido} \quad < S_e >= \frac{P_0}{\pi \frac{d^2}{4}}$$

$$\text{Onde é absorvido} \quad < S_a >= \frac{P_0}{\pi \frac{D^2}{4}}$$

(b)

$$\text{Onde é emitido} \quad E_{0e} = \sqrt{\frac{2 < S_e >}{c\,\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{8P_0}{\pi\, d^2\, c\,\epsilon_0}}$$

$$\text{Onde é absorvido} \quad E_{0a} = \sqrt{\frac{8P_0}{\pi\, D^2\, c\,\epsilon_0}}$$

(c)

$$P = \frac{< S_a >}{c} = \frac{4P_0}{\pi\, c\, D^2}$$