PS

Física IV

Escola Politécnica - 2006

FAP 2204 - GABARITO DA PS

12 de dezembro de 2006

Questão 1

Uma onda eletromagnética plana harmônica de freqüência f propaga-se no vácuo no sentido positivo do eixo x e incide sobre um material com índice de refração $n' > 1$ e permeabilidade magnética igual à do vácuo, que preenche todo o semi-espaço $x > 0$.

(a) (1,0 ponto) Escreva a expressão do campo elétrico incidente, $\vec{E}(x, y, z, t)$, em termos de E_0, c e f sabendo-se que possui amplitude E_0, oscila apenas na direção y e assume seu valor máximo quando $x = 0$ e $t = 0$. Esboce um diagrama com os vetores de onda ($\vec{k}$) e os vetores dos campos elétricos e magnéticos das ondas incidente, refletida e refratada.

(b) (0,5 ponto) Escreva a condição de contorno que deve ser satisfeita pelos campos elétrico incidente $\vec{E}$, refletido $\vec{E}_r$ e transmitido $\vec{E}_t$ na interface, para $x = 0$.

(c) (0,5 ponto) Sendo E_{0r} a amplitude do campo elétrico da onda refletida, escreva a expressão do campo elétrico refletido pela superfície, em termos das constantes $\vec{E}_{0r}$, f e c.

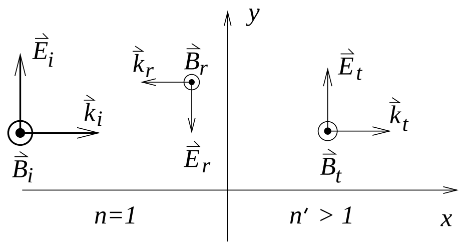
(d) (0,5 ponto) Sendo E_{0t} a amplitude do campo elétrico da onda transmitida, escreva a expressão do campo elétrico transmitido, em termos das constantes $\vec{E}_{0t}$, f e c.

Solução da questão 1

(a) $\vec{E} = E_0 \cos(kx - \omega t)\hat{y}$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c}$$

$$\boxed{\vec{E} = E_0 \cos\left[\frac{2\pi f}{c}(x - ct)\right]\hat{y}}$$



(b) Condição de contorno para o campo elétrico:

$$\vec{E} + \vec{E}_r = \vec{E}_t \longrightarrow \boxed{E_0 - E_{0r} = E_{0t}}$$

(c) Como $n' > n$, há inversão de fase na reflexão.

$$\boxed{\vec{E}_r = -E_{0r} \cos\left[\frac{2\pi f}{c}(x + ct)\right]\hat{y}}$$

(d) Não há inversão de fase na refração.

$$\boxed{\vec{E}_t = E_{0t} \cos\left[\frac{2\pi f n'}{c}(x - \frac{c}{n'}t)\right]\hat{y}}$$

Questão 2

A. (1,5 ponto) A estrela mais fraca que pode ser vista pelo olho humano é de sexta magnitude. A intensidade de tal estrela é de $1,15 \times 10^{-8}\ J/m^2 \cdot s$. Supondo que a radiação emitida pela estrela tem comprimento de onda de 5600 Å, estime quantos fótons por segundo entram na pupila do olho (diâmetro da pupila = 5 mm).

B. (1,0 ponto) A energia de inoização do estado fundamental de um íon hidrogenóide é 122,4 eV. Qual é a energia do fóton emitido na transição de n=5 pra n=3?

Dados: 1 Å $= 10^{-10}$ m; $c = 3 \times 10^8$ m/s e $h = 6,63 \times 10^{-34}$ J·s.

Solução da questão 2

A.

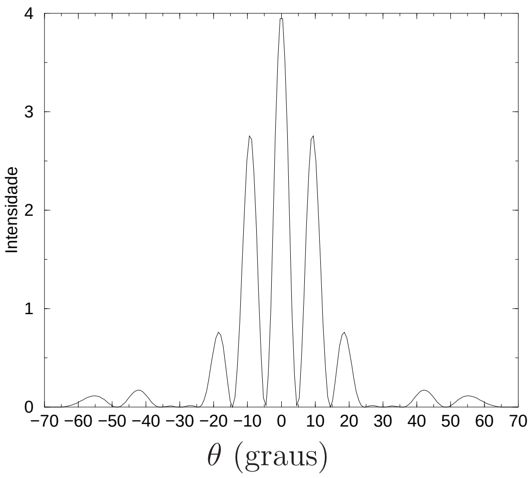
$$\langle S \rangle = 1,15 \times 10^{-8}\ J/m^2 \cdot s$$
$$\text{Área da pupila} = A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (5 \times 10^{-3})^2}{4} \approx 1,96 \times 10^{-5}\ m^2$$
$$\text{Potência} \quad P = \langle S \rangle \cdot A = 2,25 \times 10^{-13}\ J/s$$
$$\text{Energia do fóton} \quad E = hf = hc/\lambda = \frac{(6.63 \times 10^{-34})(3 \times 10^8)}{5600 \times 10^{-10}} = 3,55 \times 10^{-19}\ J$$
$$\frac{\text{no. fótons}}{\Delta t} = \frac{P}{E} = \frac{2,25 \times 10^{-13}}{3,55 \times 10^{-19}} = 0,63 \times 10^6 \text{ fótons/s}$$

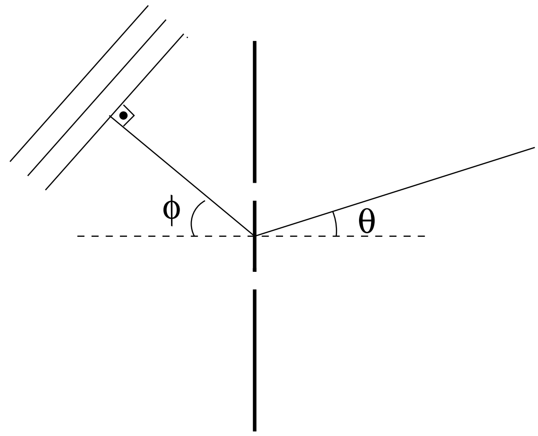
B.

$$E_f = \Delta E = -122,4 \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{3^2} \right) = 8,7\ eV$$

Questão 3

Uma fenda dupla, cada fenda com largura a e separadas por uma distância d, é iluminada normalmente com luz monocromática de comprimento de onda $\lambda = 6200$ Å. Sobre o anteparo observa-se uma sucessão de faixas brilhantes, modulada em intensidade, de tal modo que uma certa faixa de interferência foi suprimida pelo primeiro mínimo de difração (figura 1), localizado em $\theta = 30°$.





(a) (1,5 ponto) Determine a largura a e a separação d das fendas.

(b) (1,0 ponto) Em que ângulo θ se localizaria o primeiro **mínimo** de interferência, caso a incidência de luz fosse oblíqua segundo um ângulo $\phi = 30°$ (figura 2)?

Solução da questão 3

(a) Cálculo da largura e da separação das fendas.

$$d\text{sen}\theta = n\lambda \Longrightarrow d\text{sen}(30^\circ) = 3\lambda \quad \therefore \quad d = \frac{3 \times 6200}{1/2} = 37.200\text{Å}$$

$$a\text{sen}\theta = \lambda \Longrightarrow a = \frac{6200}{1/2} = 12.400\text{Å}$$

(b) Cálculo do primeiro mínimo de interferência.

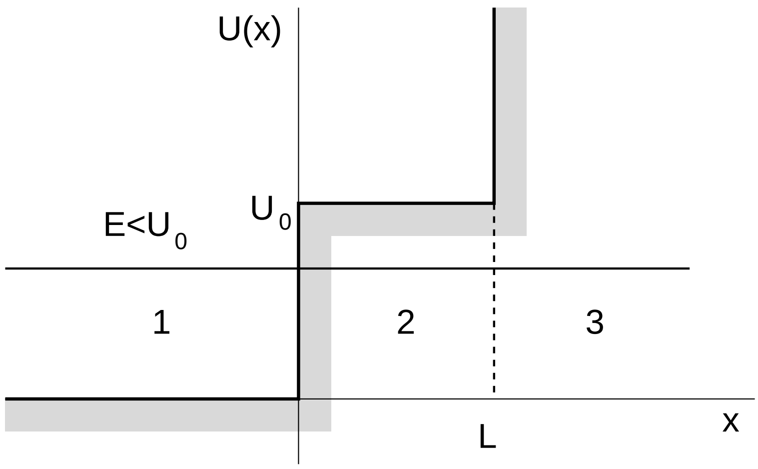
$$\text{diferença de percurso} \qquad \Delta S = d\text{sen}\theta + d\text{sen}\phi = d\text{sen}\theta + d/2$$

$$d\text{sen}\theta + d/2 = \lambda/2 \Longrightarrow \text{sen}\theta = \frac{\lambda - d}{2d} \approx -0.417$$

$$\theta = \text{arcsen}(-0.417) \approx -24.6^\circ$$

Questão 4

Uma partícula de massa m e energia $E < U_0$ se aproxima da barreira de potencial $U(x)$ mostrada na figura.



(a) (0,5 ponto) Escreva a equação de Schrödinger para a partícula na região 1 ($-\infty < x \leq 0$) e determine a solução geral $\psi_1(x)$ nessa região.

(b) (0,5 pontos) Escreva a equação de Schrödinger para a partícula na região 2 ($0 \leq x \leq L$) e determine a solução geral $\psi_2(x)$ nessa região.

(c) (0,5 pontos) Qual é a função de onda $\psi_3(x)$ na região 3 ($x \geq L$) ? Escreva a condição de contorno apropriada em $x = L$ relacionando ψ_2 e ψ_3.

(c) (1,0 ponto) Escreva as condições de contorno apropriadas em $x = 0$ relacionando ψ_1 e ψ_2. Não é necessário resolver essas equações.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 4}}$

(a) A equação de Schrödinger para a função de onda $\psi_1(x)$ é

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2} = E\psi_1(x) \quad \Longrightarrow \frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2} = -k^2\psi_1(x),$$

onde $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$. A solução geral é

$$\psi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}.$$

(b) A equação de Schrödinger para a função de onda $\psi_2(x)$ é

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2} + U_0\psi_2(x) = E\psi_2(x) \quad \Longrightarrow \frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2} = K^2\psi_2(x),$$

onde $K = \sqrt{2m(U_0 - E)/\hbar^2}$. A solução geral é

$$\psi_2(x) = Ce^{Kx} + De^{-Kx}.$$

(c) A função de onda na região 3 é $\psi_3(x) = 0$. A condição de contorno que deve ser satisfeita em $x = L$ é

$$\psi_2(L) = \psi_3(L) = 0 \quad \Longrightarrow Ce^{KL} + De^{-KL} = 0.$$

Portanto $D = -Ce^{2KL}$ e

$$\psi_2(x) = C\left[e^{Kx} - e^{-K(x-2L)}\right].$$

(d) As condições de contorno que devem ser satisfeitas em $x = 0$ são

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \Longrightarrow A + B = C(1 - e^{2KL}),$$
$$\left.\frac{d\psi_1(x)}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{d\psi_2(x)}{dx}\right|_{x=0} \Longrightarrow ik(A - B) = CK(1 + e^{2KL}).$$