P3

Física IV

Escola Politécnica - 2007

FGE 2203 - GABARITO DA P3

4 de dezembro de 2007

Questão 1

Considere o modelo de Bohr do átomo de hidrogênio em que um elétron de massa m e carga $-e$ se move numa órbita circular de raio r em torno de um núcleo fixo de carga $+e$.

1. (0,5 pontos) Partindo da segunda lei de Newton determine o módulo da velocidade do elétron v em função do raio da órbita r.

2. (1,0 ponto) Determine o comprimento de onda de de Broglie do elétron λ em função do raio da órbita r. Sabendo-se que uma órbita estacionária deve acomodar um número inteiro n de comprimentos de onda ao longo de sua circunferência, determine os raios das órbitas permitidas r_n.

3. (1,0 ponto) Determine a energia do elétron na órbita de raio r_n.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 1}}$

1. Da segunda lei de Newton e da lei de Coulomb,,

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2} = m\frac{v^2}{r}.$$

   Logo,

$$v = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{mr}\right)^{1/2}.$$

2. O comprimento de onda de de Broglie é

$$\lambda = \frac{h}{mv} = h\left[\frac{r}{m(e^2/4\pi\epsilon_0)}\right]^{1/2}.$$

   A condição para órbitas estacionárias é

$$2\pi r = n\lambda = nh\left[\frac{r}{m(e^2/4\pi\epsilon_0)}\right]^{1/2}. \quad \text{Logo,} \quad r_n = \frac{n^2\hbar^2}{m(e^2/4\pi\epsilon_0)}.$$

3. A energia do elétron numa órbita de raio r é

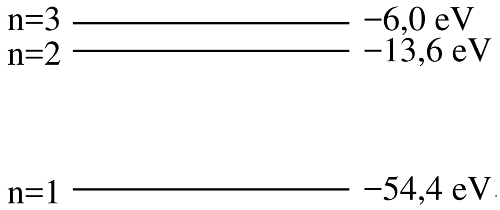
$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}.$$

   Portanto os níveis de energia são dadas por

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{1}{r_n} = -\frac{m}{2\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2\frac{1}{n^2}.$$

Questão 2

Um átomo com um elétron tem os níveis de energia indicados na figura



(a) (1,0 ponto) Determine o número de prótons deste átomo.

(b) (0,5 ponto) Se o átomo estiver no estado fundamental, ele pode absorver um fóton de 15 eV? Justifique.

(c) (1,0 ponto) Qual é o comprimento de onda do fóton emitido na transição $n = 3 \rightarrow n = 1$?

Dados: $h = 4,1 \times 10^{-15}$ eV·s ; $c = 3,0 \times 10^{8}$ m/s.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 2}}$

(a) Usando a expressão $E_n = -13,6\ Z^2/n^2$ com $n = 1$ obtemos

$$-54,4 = 13,6\ Z^2 \Longrightarrow Z = 2 \quad (^4\mathrm{He}^+ \text{ ou seu isótopo } ^3\mathrm{He}^+)$$

(b) Se absorvesse um fóton com 15 eV, o elétron terminaria com energia igual a -54,4 + 15 = -39 eV. Porém, como não há nenhum nível com esta energia o fóton <u>não</u> será absorvido.

(c) A diferença de energia entre os níveis é

$$\Delta E = E_3 - E_1 = -54,4\left(\frac{1}{9} - 1\right) = 54,4 \times \frac{8}{9} = \frac{hc}{\lambda}$$

$$\Longrightarrow \lambda = \frac{(4,1 \times 10^{-15})(3 \times 10^8)}{54,4 \times 8/9} \approx 2,5 \times 10^{-8}\mathrm{m}$$

Questão 3

A função de onda normalizada do estado fundamental de uma partícula numa caixa unidimensional com paredes infinitamente altas é dada por

$$\psi(x) = \begin{cases} \sqrt{2/L}\,\mathrm{sen}(\pi x/L) & \text{se } 0 < x < L, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

1. (1,0 ponto) Determine a energia E da partícula nesse estado sabendo-se que a função de onda satisfaz a equação de Schrödinger para essa energia.

2. (1,0 ponto) Determine a probabilidade de que a partícula seja encontrada entre $x = 0$ e $x = L/4$.

3. (0,5 pontos) Utilize a relação de incerteza e o fato de que $\Delta x \leq L$ para obter um limite inferior para a incerteza no momento Δp.

<u>Dado:</u> $\int \mathrm{sen}^2 bx \; dx = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\mathrm{sen}(2bx)}{4b}$

Solução da questão 3

1. A equação de Schrödinger para $0 < x < L$ é

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi.$$

Substituindo

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{2}{L}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) = -\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \psi,$$

obtemos

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \psi = E\psi. \quad \text{Logo} \quad E = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 = \frac{h^2}{8mL^2}.$$

2. A probabilidade é

$$\begin{aligned} P(0 < x < L/4) &= \int_0^{L/4} |\psi(x)|^2 dx = \frac{2}{L}\int_0^{L/4} \mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{2}{L}\left[\frac{x}{2} - \frac{\mathrm{sen} 2\pi x/L}{4\pi/L}\right]_0^{L/4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \approx 9\,\%. \end{aligned}$$

3. De acordo com a relação de incerteza devemos ter

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Portanto

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{2\Delta x} \geq \frac{\hbar}{2L}.$$

Questão 4

(a) (1,0 ponto) Num átomo (neutro) no estado fundamental as camadas $n = 1$ e $n = 2$ estão totalmente preenchidas. Além disto, há oito elétrons na camada $n = 3$. Determine o número atômico deste átomo.

(b) (1,0 ponto) Quais são os valores possíveis do módulo do momento angular orbital e sua projeção sobre o eixo z para um elétron numa subcamada $3d$?

(c) (0,5 ponto) Quais são os valores possíveis do módulo do momento angular do spin e sua projeção sobre o eixo z para um elétron?

Solução da questão 4

(a) Da tabela

n	ℓ	m_ℓ	m_s	elétrons
1	0	0	$\pm 1/2$	2
2	0	0	$\pm 1/2$	2
	1	$-1, 0, 1$	$\pm 1/2$	6
3	0	0	$\pm 1/2$	2
	1	$-1, 0, 1$	$\pm 1/2$	6

vemos que o número total de elétrons é 18. Como o átomo é neutro, $Z = 18$.

(b) Para um elétron na camada 3d, $\ell = 2$

$$\Longrightarrow L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar = \sqrt{6}\,\hbar$$

$$|m_\ell| \leq \ell \Longrightarrow L_z = m_\ell\,\hbar = -2\hbar, -\hbar, 0, \hbar, 2\hbar$$

(c) O módulo do momento angular de spin S e sua projeção S_z sobre o eixo z são dadas, respectivamente, por

$$S = \sqrt{s(s+1)}\,\hbar = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\hbar$$

$$S_z = m_s\,\hbar = \pm\frac{\hbar}{2}$$

Formulário

Átomo hidrogenóide: $E = -\dfrac{13,6\ Z^2}{n^2}$ eV.

Teoria de de Broglie: $\lambda = h/p, \quad f = E/h.$

Princípio de Incerteza: $\Delta p\,\Delta x \geq \hbar/2, \quad \Delta E\,\Delta t \geq \hbar/2.$

Equação de Schrödinger independente do tempo: $-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x).$

Alguns números quânticos: $L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar,\ L_z = m_\ell\,\hbar,\ S = \sqrt{s(s+1)}\,\hbar,\ S_z = m_s\,\hbar.$