PR

Física IV

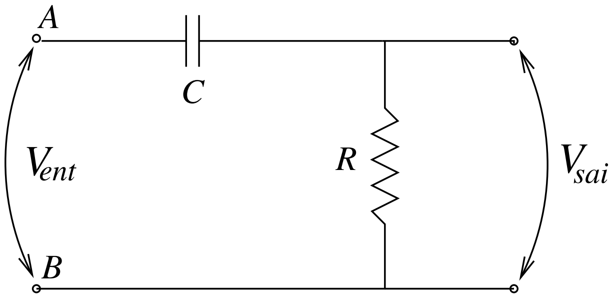
Escola Politécnica - 2007

FAP 2204 - GABARITO DA PR

12 de fevereiro de 2008

Questão 1

No circuito mostrado na figura abaixo, um capacitor C está em série com um resistor R. Aplica-se ao circuito uma ddp $v_{ent}(t) = V_{ent}\,\text{sen}(\omega t)$ entre os pontos A e B.



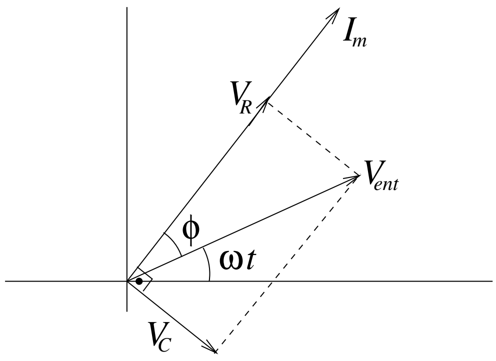
(a) (0,5 ponto) Desenhe no diagrama de fasores para o sistema as voltagens e as correntes no capacitor e no resistor.

(b) (1,0 ponto) Calcule I_m e ϕ na expressão da corrente no circuito $I(t) = I_m \text{sen}(\omega t + \phi)$.

(c) (1,0 ponto) Calcule a relação entre a voltagem máxima de saída V_{sai} e a voltagem máxima de entrada V_{ent}. Dê sua resposta em função de C, R e ω. O sistema filtra as frequências altas (filtro passa baixos) ou as frequências baixas (filtro passa altos)?

Solução da questão 1

(a) Como o resistor e o capacitor estão em série, a corrente é a mesma nos dois elementos. A voltagem no resistor está em fase com a corrente. No capacitor a voltagem está atrasada de $\pi/2$ em relação à corrente.



(b) A corrente $I(t) = I_m \text{sen}(\omega t + \phi)$. Da figura no item (a) obtemos

$$\left.\begin{array}{l} V_{ent} = \sqrt{V_R^2 + V_C^2} \\ V_R = RI_m, \quad V_C = X_C I_m, \quad X_C = (\omega C)^{-1} \end{array}\right\} \Longrightarrow V_{ent} = \sqrt{R^2 + X_C^2}\, I_m$$

$$\Longrightarrow \boxed{I_m = \frac{V_{ent}}{\sqrt{R^2 + X_C^2}}} \quad \text{e} \quad \boxed{\phi = \tan^{-1}\left(\frac{V_C}{V_R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{X_C}{R}\right)}$$

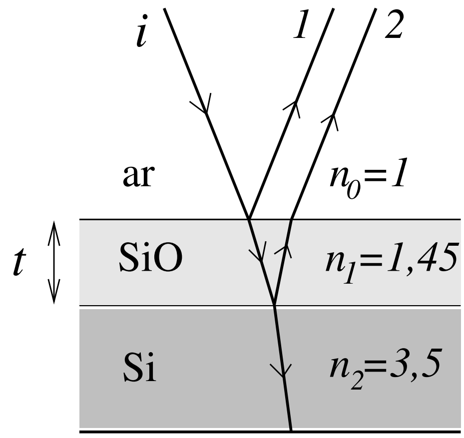
(c) A razão entre as voltagens máximas é

$$\frac{V_{sai}}{V_{ent}} = \frac{RI_m}{ZI_m} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (1/\omega\, C)^2}}$$

$$\frac{V_{sai}}{V_{ent}} \xrightarrow{\omega \to \infty} 1 \quad \text{e} \quad \frac{V_{sai}}{V_{ent}} \xrightarrow{\omega \to 0} 0 \quad \underline{\text{filtro passa altos}}$$

Questão 2

(A) Para reduzir as perdas por reflexão costuma-se revestir as células solares com uma fina camada de monóxido de silício (SiO) de espessura t e com índice de refração $n_1 = 1,45$. Esta camada é depositada sobre silício (Si), com índice de refração $n_2 = 3,5$ conforme mostra a figura.



Suponha que o raio i incide quase normalmente em relação à película de SiO.

(a) (1,0 ponto) Deduza a equação que fornece as espessuras t para as quais a reflexão de luz é mínima e a transmissão é máxima para um comprimento de onda λ_m no meio do espectro visível.

(b) (0,5 ponto) Para $\lambda_m = 550$ nm, qual é a espessura mínima t da película para reduzir ao máximo as perdas por reflexão?

(B) (1,0 ponto) Uma bolha de sabão, com índice de refração 1,33, reflete fortemente as cores vermelha e verde da luz branca. Qual é a espessura t da bolha de sabão, sabendo-se que no ar o comprimento de onda do vermelho é 700 nm e do verde 500 nm ?

Solução da questão 2

(A) Célula solar.

(a) A luz transmitida será máxima quando os raios 1 e 2 interferirem destrutivamente. Lembrando que a luz sofre uma mudança de fase de π ao ser refletida por um meio de índice de refração maior, a condição para interferência destrutiva é dada por:

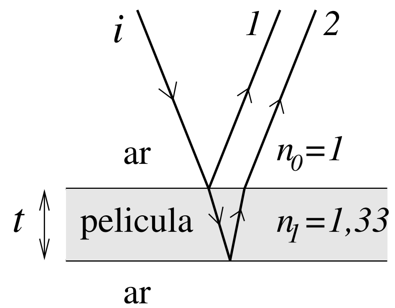
$$(2\pi \frac{2t}{\lambda/n_1} + \pi) - \pi = (2j+1)\pi \Longrightarrow t = \frac{(2j+1)\lambda}{4n_1},$$

onde j é um inteiro.

(b) A espessura mínima é obtida colocando-se $j = 0$ na expressão do item (a).

$$t = \frac{\lambda}{4n_1} = \frac{550}{4 \times 1,45} \approx 95 \text{ nm}$$

(B) Bolha de sabão.



A condição para interferência construtiva na bolha de sabão é

$$2\pi \frac{2t}{\lambda/n_1} - \pi = 2j\pi \Longrightarrow t = \frac{(2j+1)\lambda}{4n_1},$$

onde j é um inteiro.

Como há interferência construtiva para o vermelho (λ_1) e o verde (λ_2),

$$\frac{(2j_1+1)\lambda_1}{4n_1} = \frac{(2j_2+1)\lambda_2}{4n_1} \Longrightarrow (2j_1+1)\lambda_1 = (2j_2+1)\lambda_2$$

$$\Longrightarrow (2j_1+1)7 = (2j_2+1)5 \Longrightarrow 5j_2 - 7j_1 = 1 \Longrightarrow j_1 = 2, \quad j_2 = 3.$$

Substituindo o par j_1, λ_1 , ou o par j_2, λ_2 na expressão para t obtemos:

$$t = \frac{(2 \times 2 + 1)\lambda_1}{4n_1} = \frac{3500}{4 \times 1,33} \approx 658 \text{ nm}$$

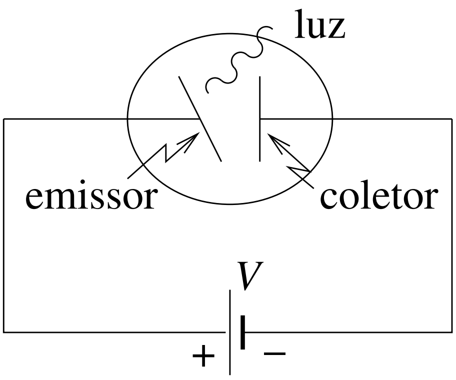
Questão 3

Uma fotocélula tem a superfície do emissor revestida de lítio (Li) que possui uma função de trabalho $\phi = 2,3$ eV.

(a) (0,5 ponto) Calcule o comprimento de onda limiar do lítio (o comprimento de onda acima do qual não há efeito fotoelétrico).

(b) (1,0 ponto) Se na célula fotoelétrica apenas 50 % dos fótons incidentes arrancam elétrons no emissor, qual é o número de elétrons emitidos por segundo e por cm^2 quando o emissor é iluminado por luz de comprimento de onda igual a 500 nm e intensidade de 0,05 W/m^2?

Liga-se a fotocélula a uma bateria com a voltagem invertida, como mostra a figura. Desta forma, os elétrons emitidos pelo lítio no emissor são freiados pelo coletor.



(c) (1,0 ponto) Determine o potencial V da bateria para que não haja corrente no circuito (potencial de frenagem) quando o emissor é iluminado com luz de comprimento de onda igual a 500 nm.

Dados: $h \approx 4,1 \times 10^{-15}\ eV \cdot s \approx 6,6 \times 10^{-34}\ J \cdot s$ e $c \approx 3,0 \times 10^{8}\ m/s$.

Solução da questão 3

(a) A energia cinética E_c do elétron arrancado do emissor pelo fóton é dada por

$$E_c = hf - \phi = h\frac{c}{\lambda} - \phi$$

No limiar do efeito fotoelétrico

$$E_c = 0 \Longrightarrow h\frac{c}{\lambda} = \phi \Longrightarrow \lambda = \frac{hc}{\phi} = \frac{(4,1 \times 10^{-15})(3,0 \times 10^{8})}{2,3} \approx 5,4 \times 10^{-7}m$$

(b) A energia E_1 de um fóton de comprimento de onda 500 nm é dada por

$$E_1 = h\frac{c}{\lambda} = \frac{(6,6 \times 10^{-34})(3,0 \times 10^{8})}{5 \times 10^{-7}} \approx 2,2 \times 10^{-19}\text{J}.$$

$$\frac{\text{n}^{\underline{\circ}} \text{ de fótons}}{\text{cm}^2 \times \text{seg}} = \frac{\text{potência por cm}^2}{E_1} = \frac{0,05 \times 10^{-4}}{2,2 \times 10^{-19}} \approx 2,2 \times 10^{13}$$

$$\frac{\text{n}^{\underline{\circ}} \text{ de elétrons}}{\text{cm}^2 \times \text{seg}} = 0,5 \times \frac{\text{n}^{\underline{\circ}} \text{ de fótons}}{\text{cm}^2 \times \text{seg}} \approx 1,1 \times 10^{13}$$

(c) A energia cinética do elétron imediatamente após deixar o emissor é

$$E_c = h\frac{c}{\lambda} - \phi = \frac{(4,1 \times 10^{-15})(3,0 \times 10^{8})}{5,0 \times 10^{-7}} - 2,3 \approx 2,5 - 2,3 = 0,2 \text{ eV} = 3,2 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Denotando os potenciais no emissor e no coletor por V_1 e V_2, respectivamente, temos $V_{frenagem} = V_1 - V_2$. Lembrando que o elétron tem carga $-q_e$ e chega no coletor com energia cinética zero, podemos escrever

$$E_c - V_1 q_e = -V_2 q_e \Longrightarrow E_c = q_e(V_1 - V_2) = q_e V_{frenagem}$$

$$V_{frenagem} = \frac{E_c}{q_e} = \frac{3,2 \times 10^{-19}}{1,6 \times 10^{-19}} \approx 2,0 \text{ volts}$$

Questão 4

A função de onda do átomo de hidrogênio no estado fundamental 1s é

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}}\, e^{-r/a_0},$$

onde a_0 é o raio de Bohr e r a distância entre o elétron e o próton.

(a) (0,5 ponto) Qual é a probabilidade $P(r)dr$ de encontrar o elétron em uma casca esférica de raios r e $r + dr$?

(b) (1,0 ponto) Esboce o gráfico de $P(x) \times x$, onde $x = 2r/a_0$. Calcule o valor de r que maximiza $P(r)$.

(c) (1,0 ponto) Calcule a probabilidade de encontrar o elétron 1s a uma distância menor do que a_0.

Dado: $\displaystyle\int x^2 e^{ax} dx = e^{ax}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right)$

Formulário

Circuitos com corrente alternada

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \quad X_L = \omega L, \quad X_C = \frac{1}{\omega C}, \quad \tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R}, \quad V_m = Z I_m.$$

Películas finas: Ao incidir sobre um meio com índice de refração maior do que aquele no qual a luz se propaga, o raio refletido sofre uma mudança de fase igual a π radianos. A interferência construtiva (destrutiva) de dois raios de luz ocorre quando a diferença dos percursos ópticos dos raios é igual a um número inteiro (semi-inteiro) de comprimentos de onda.

Fótons: $E = hf, \quad p = E/c, \quad \lambda = c/f.$

Efeito fotoelétrico: $E_c = hf - \phi$

Probabilidade de encontrar uma partícula com função de onda ψ num volume dV centrado num ponto com vetor posição $\vec{r}$: $P(\vec{r})dV = |\psi(\vec{r})|^2 dV\ , \quad \psi(\vec{r}) \equiv \psi(x, y, z).$

$\boxed{\textbf{Solução da questão 4}}$

(a) A probabilidade $P(r)dr$ de encontrar o elétron na casca esférica é

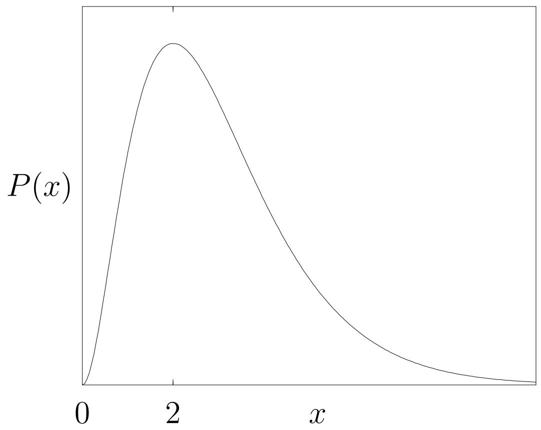
$$P(r)dr = |\psi|^2 4\pi r^2 dr = \frac{4r^2}{a_0^3} e^{-2r/a_0} dr.$$

(b) Em termos de $x = 2r/a_0$, a probabilidade $P(r)$ se escreve como

$$P(x) = \frac{1}{a_0} x^2 e^{-x}.$$

O máximo é calculado através da equação

$$\frac{dP(x)}{dx} = 0 \Longleftrightarrow 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = 0 \Longleftrightarrow (2-x)xe^{-x} = 0 \Longrightarrow x = 2 \Longrightarrow \boxed{r = a_0}$$



(c) A probabilidade de encontrar o elétron num raio menor do que a_0 é

$$\int_0^{a_0} P(r)dr = \int_0^{a_0} \frac{4r^2}{a_0^3} e^{-2r/a_0} dr = \frac{1}{2} \int_0^2 e^{-x} x^2 dx = -5e^{-2} + 1.$$