PS

Física IV

Escola Politécnica - 2007

FGE 2203 - GABARITO DA PS

11 de dezembro de 2007

Questão 1

Um capacitor de placas paralelas é formado por dois discos circulares de raio $\underline{a}$ separados por uma distância $d << a$ no vácuo. Após ligarmos as placas a uma bateria, a carga na placa positiva do capacitor passou a variar como $Q(t) = Q_0(1 - e^{-t/\tau})$, onde Q_0 e τ são constantes.

(a) (1,0 ponto) Calcule o módulo do campo elétrico entre as placas do capacitor em função de $Q(t)$.

(b) (1,5 ponto) Usando a lei de Ampère com o termo de corrente de deslocamento,

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A},$$

calcule o vetor campo magnético entre as placas do capacitor.

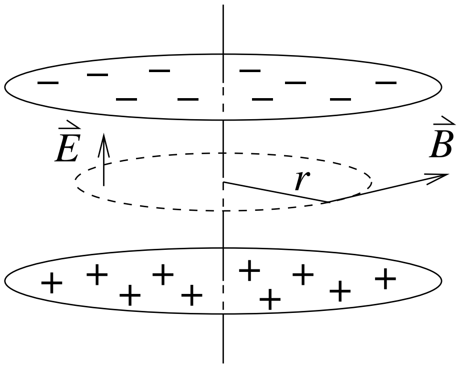
Solução da questão 1

(a) O módulo do campo elétrico entre as placas do capacitor é

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q(t)}{\pi a^2 \epsilon_0}}$$

(b) A corrente I entre as placas do capacitor é nula. Neste caso,

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$



Note que $\vec{E}$ só depende de t e $\vec{B}$ tem simetria cilíndrica ($|\vec{B}|$ em cada instante só depende da distância r até o eixo dos discos). Assim,

$$2\pi r B = \mu_0 \epsilon_0 \frac{dE}{dt} \pi r^2$$

$$B = \frac{\mu_0 \, Q_0 \, e^{-t/\tau} \, r}{2\pi a^2 \, \tau}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 \, Q_0 \, e^{-t/\tau} \, r}{2\pi a^2 \, \tau} \hat{\theta}}$$

Questão 2

Uma película muito fina de SiO, transparente, com espessura d e índice de refração $n_1 = 1{,}45$, é depositada sobre um vidro com índice de refração $n_2 = 1{,}52$. O vidro coberto pela película está no vácuo. Luz branca com comprimentos de onda compreendidos entre $400 < \lambda_v < 700$ nm, incide normalmente sobre a película de SiO. Observa-se que, devido à interferência, a luz refletida pela película tem uma cor (comprimento de onda) predominante.

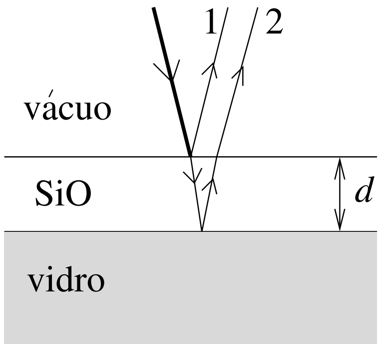
(a) (0,5 ponto) Faça um esboço da película indicando os raios de luz que interferem e que são responsáveis pela cor observada.

(a) (1,0 ponto) Escreva a equação que fornece os máximos de interferência observados por reflexão da luz incidente. Justifique sua resposta.

(c) (1,0 ponto) Para uma espessura $d = 500$ nm, determine a cor (comprimento de onda) com que a película será observada.

Solução da questão 2

(a) Os raios relevantes para o processo de interferência são os raios 1 e 2 mostrados na figura.



(b) O raio 1 sofre uma defasagem de π (1/2 comprimento de onda), ao ser refletido pelo SiO. O raio 2 também sofre uma defasagem de π, por ter sido refletido pelo vidro que tem índice de refração maior do que o SiO. Assim, a condição para interferência construtiva é:

$$\underbrace{2d/\lambda + 1/2}_{\text{raio 1}} - \underbrace{1/2}_{\text{raio 2}} = 2d/\lambda = m,$$

onde $\lambda = \lambda_v/n_1$ é o comprimento de onda dentro da película de SiO e m é um inteiro. Ou, de forma equivalente,

$$\underbrace{4\pi d/\lambda + \pi}_{\text{raio 1}} - \underbrace{\pi}_{\text{raio 2}} = 4\pi d/\lambda = 2\pi m,$$

$$\Longrightarrow \boxed{2d = m\lambda = m\lambda_v/n_1}$$

(c) Para uma espessura de 500 nm teremos

$$\lambda_v = \frac{2dn_1}{m} = \frac{1450}{m}\ \text{nm}$$

Apenas $m = 3$ fornece um comprimento de onda dentro do intervalo da luz visível: $\lambda_v \approx 483$ nm.

Questão 3

Os níveis de energia de um átomo de um elétron e carga nuclear $+Ze$, como o hélio ionizado He^+ ($Z = 2$), ou o lítio duplamente ionizado Li^{++} ($Z = 3$), são dados por

$$E_n = -\frac{hcRZ^2}{n^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

onde $R > 0$ é a constante de Rydberg.

1. (1,0 ponto) Um fóton choca-se com o átomo cujo elétron se encontra no nível $n = 4$. O elétron é arrancado do átomo e adquire uma energia cinética K. Qual é a freqüência mínima do fóton f_{min} para que esse processo seja possível?

2. (1,0 ponto) Determine o maior comprimento de onda possível λ_{max} para a radiação emitida na transição para o nível $n = 2$.

3. (0,5 pontos) O átomo permanece no nível excitado $n = 2$ por um tempo τ antes de decair para o nível fundamental $n = 1$. De acordo com o princípio de incerteza qual é a incerteza mínima ΔE na energia do nível $n = 2$? Qual é incerteza relativa $\Delta f / f$ na freqüência do fóton emitido?

$\boxed{\textbf{Solução da questão 3}}$

1. A freqüência do fóton deve ser tal que

$$hf > (E_\infty - E_4) + K = \frac{hcRZ^2}{16} + K.$$

Portanto

$$f_{\text{min}} = \frac{cRZ^2}{16} + \frac{K}{h}.$$

2. A freqüência da radiação emitida na transição do nível m para o nível $n < m$ é dada por

$$f_{m\to n} = \frac{E_m - E_n}{h} = cRZ^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right).$$

Na transição para o nível $n = 2$ temos

$$f = f_{m\to 2} = cRZ^2\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2}\right) \geq cRZ^2\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) = \frac{5}{36}cRZ^2 = f_{\text{min}}.$$

Portanto

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{c}{f_{\text{min}}} = \frac{36}{5RZ^2}.$$

3. De acordo com o princípio de incerteza energia-tempo a incerteza mínima na energia é dada por

$$\Delta E\tau = \frac{\hbar}{2}. \qquad \text{Portanto,} \qquad \Delta E = \frac{\hbar}{2\tau}.$$

A incerteza na freqüência do fóton emitido é

$$\Delta f = \frac{\Delta E}{h} = \frac{\Delta E}{2\pi\hbar} = \frac{1}{4\pi\tau}.$$

A energia do fóton emitido é

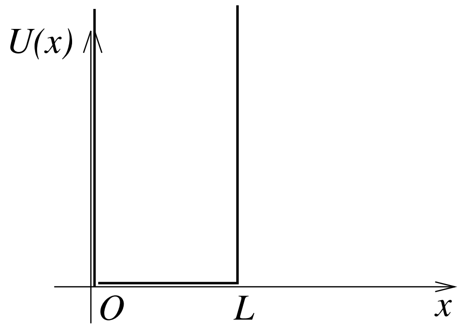
$$f = \frac{E_2 - E_1}{h} = \frac{3}{4}cRZ^2.$$

Portanto a incerteza relativa é

$$\frac{\Delta f}{f} = 3\pi cRZ^2\tau.$$

Questão 4

Uma partícula de massa m e energia E se encontra numa caixa unidimensional com paredes impenetráveis, conforme representado na figura.



(a) (1,0 ponto) Escreva a equação de Schrödinger independente do tempo para esta partícula no intervalo $0 < x < L$ e obtenha a solução geral desta equação.

(b) (1,0 ponto) Imponha as condições de contorno pertinentes ao problema e determine as funções de onda e os níveis de energia.

(c) (0,5 ponto) No estado fundamental, ao redor de que valor de x é mais provável encontrar a partícula? Justifique

Solução da questão 4

(a) A equação de Schrödinger para $0 < x < L$ é

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi \Longrightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi = -k^2\psi,$$

onde $k = \sqrt{2mE}/\hbar$. A solução geral pode ser escrita como

$$\psi(x) = A\,\mathrm{sen}(kx) + B\cos(kx) \quad \underline{\text{ou}} \quad \psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}.$$

(b) Impondo as condições de contorno obtemos:

$\psi(0) = 0 \Rightarrow A = 0$

$\Rightarrow \psi(x) = B\,\mathrm{sen}(kx)$

$\psi(L) = 0 = B\,\mathrm{sen}(kL) \Rightarrow$

$kL = n\pi \quad n = 1, 2, ...$

$\Rightarrow \psi_n(x) = B\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi}{L}x)$

$E_n = \dfrac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2mL^2} = \dfrac{h^2 n^2}{8mL^2}$

$\underline{\text{ou}} \quad \psi(0) = A + B = 0 \Rightarrow A = -B$

$\Rightarrow \psi(x) = 2iA\,\mathrm{sen}(kx)$

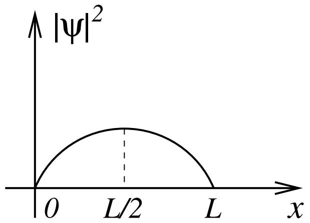
$\psi(L) = 0 = 2iA\,\mathrm{sen}(kL)$

$\Rightarrow kL = n\pi \quad n = 1, 2, ...$

$\Rightarrow \psi_n(x) = 2iA\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi}{L}x)$

$E_n = \dfrac{h^2 n^2}{8mL^2}$

(c)



A probabilidade de encontrar a partícula é máxima num dx centrado em $x = L/2$ pois $|\psi|^2 = A^2\,\mathrm{sen}^2(\pi x/L)$ tem um pico neste valor de x.

Formulário

Condensador plano: $C = \epsilon_0 A/d, \quad E = \sigma/\epsilon_0.$

Interferência em películas: $\quad 2dn = (m + 1/2)\lambda, \qquad 2dn = m\lambda.$

Fótons: $E = hf, \quad E = pc.$

Átomo hidrogenóide: $E = -\dfrac{13,6\ Z^2}{n^2}$ eV.

Teoria de de Broglie: $\lambda = h/p, \quad f = E/h.$

Princípio de Incerteza: $\Delta p\, \Delta x \geq \hbar/2, \quad \Delta E\, \Delta t \geq \hbar/2.$

Equação de Schrödinger independente do tempo: $-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x).$