P1

Física IV

Escola Politécnica - 2008

FAP 2204 - GABARITO DA P1

16 de setembro de 2008

Questão 1

Em um certo circuito RLC em série a corrente máxima e a voltagem máxima são dadas por $I_m = 9\,A$ e $V_m = 180\,V$, respectivamente. A corrente $i(t) = I_m \cos(\omega\, t)$ está adiantada de 45^o em relação à voltagem da fonte $v(t) = V_m \cos(\omega\, t + \phi)$.

(a) (0.5 ponto) Desenhe o diagrama de fasores das correntes e voltagens em cada um dos elementos.

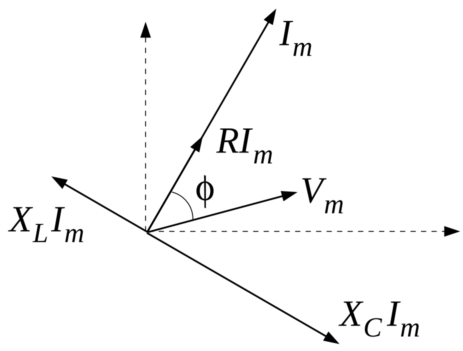
(b) (1,0 ponto) Calcule a impedância, a resistência e reatância $X_L - X_C$.

(c) (0,5 ponto) Calcule a potencia média fornecida pela fonte.

(d) (0,5 ponto) Escreva a expressão da voltagem $v_L(t)$ no indutor, explicitando o ângulo de defasagem em relação à corrente. Dê sua resposta em função apenas do valor L da indutância e de ω.

Solução da questão 1

(a) O diagrama de fasores é mostrado na figura abaixo



onde os vetores pontilhados indicam os eixos vertical e horizontal e $\phi = \pi/4$.

(b) A impedância, a resistência e a reatância são dadas respectivamente por

$$Z = \frac{V_m}{I_m} = 20\,\Omega, \qquad R = Z\cos(\pi/4) = 10\sqrt{2}\,\Omega, \qquad X_L - X_C = -\sqrt{Z^2 - R^2} = -10\sqrt{2}\,\Omega$$

(c) A potência média é

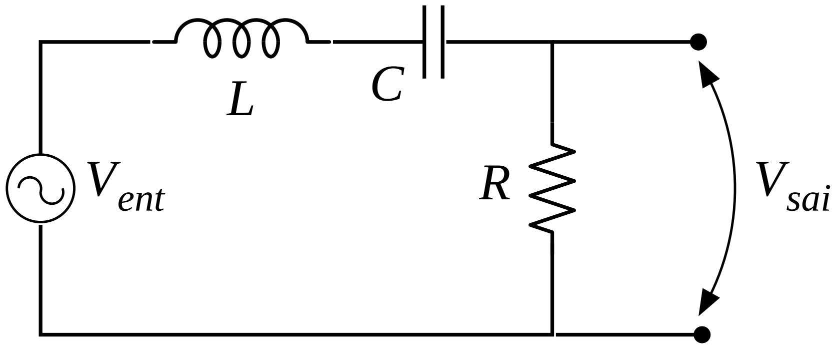
$$P_{med} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos\phi = 405\sqrt{2}$$

(d) A voltagem $v_L(t)$ no indutor está adiantada de $\pi/2$ em relação à corrente $i(t)$. Assim,

$$v_L(t) = L\omega I_m \cos(\omega t + \pi/2) = 9L\omega\cos(\omega t + \pi/2)$$

Questão 2

Em um circuito RLC, a corrente $i = I\cos(\omega\, t)$ e a voltagem da fonte $v(t) = V_{ent}\cos(\omega\, t + \phi)$.



(a) (1,0 ponto) Calcule V_{sai}/V_{ent}, onde V_{sai} é a voltagem máxima no resistor, em função de R, L, C e ω.

(b) (1,0 ponto) Calcule a frequência de ressonância. Esboce o diagrama V_{sai}/V_{ent} em função de ω, indicando a posição da frequência de ressonância.

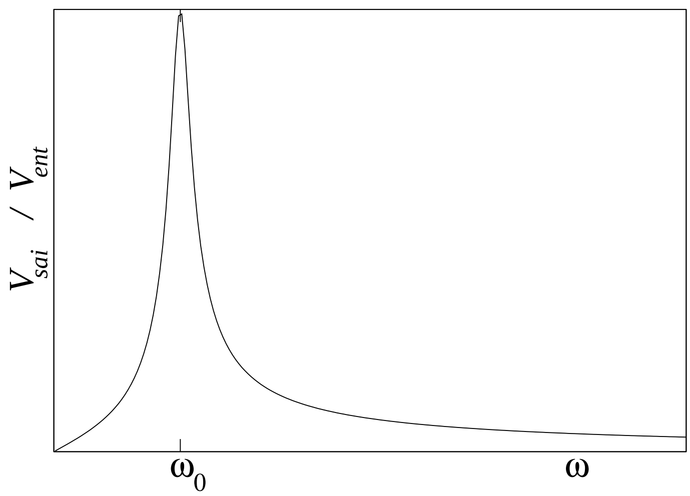
(c) (0,5 ponto) Qual o valor de V_{sai}/V_{ent} quando o circuito está em uma situação de ressonância?

Solução da questão 2

(a) Os máximos das voltagens de entrada e saída são

$$V_{sai} = RI/, \quad V_{ent} = ZI \Longrightarrow \boxed{\frac{V_{sai}}{V_{ent}} = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}}}$$

(b) No gráfico $V_{sai}/V_{ent} \times \omega$ esboçado abaixo ω_0 é a frequência de ressonância, obtida através da equação $\omega_0 L = 1/(\omega_0 C) \Rightarrow \boxed{\omega_0 = 1/\sqrt{LC}}$.



(c) Na ressonância $\omega L = 1/(\omega C) \Rightarrow Z = R$. Substituindo este resultado na expressão do item (a) obtemos $\boxed{V_{sai}/V_{ent} = 1}$.

Questão 3

O campo elétrico de uma onda eletromagnética no vácuo é dado por

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \sin(\alpha x)\cos(\beta t)\widehat{e}_y$$

(a) (1,0 ponto) Deduza a relação existente entre as constantes α e β sabendo-se que o campo elétrico satisfaz a equação de onda

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo.

(b) (1,0 ponto) Deduza a expressão do campo magnético da onda a partir da lei de Faraday.

(c) (0,5 ponto) Escreva a expressão analítica das ondas que se compõem para produzir esta onda estacionária.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 3}}$

(a) Usando a expressão de $\vec{E}$ obtemos

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = -\alpha^2 E_0 \widehat{e}_y \mathrm{sen}(\alpha x)\cos(\beta t),$$

e

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -b^2 \widehat{e}_y E_0 \mathrm{sen}(\alpha x)\cos(\beta t).$$

Substituindo na equação de ondas obtemos

$$\alpha^2 = \frac{\beta^2}{c^2}. \quad \text{Logo,} \quad \beta = \alpha c.$$

(b) A lei de Faraday fornece

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mathbf{rot}\,\vec{E} = -\widehat{e}_z \frac{\partial}{\partial x} E_0 \mathrm{sen}(\alpha x)\cos(\beta t) = -\widehat{e}_z E_0 \alpha \cos(\alpha x)\cos(\beta t).$$

Integrando em t obtemos

$$\vec{B} = -\widehat{e}_z E_0 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\cos(\alpha x)\mathrm{sen}(\beta t) = -\widehat{e}_z \left(\frac{E_0}{c}\right)\cos(\alpha x)\mathrm{sen}(\beta t)$$

(c) Usando a identidade trigonométrica

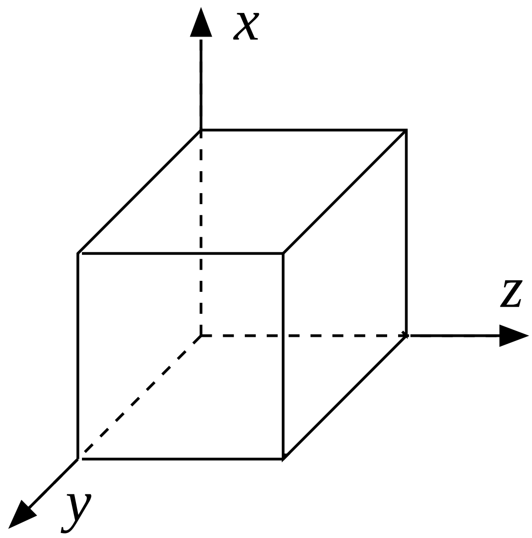
$$\mathrm{sen}(A) + \mathrm{sen}(B) = 2\mathrm{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

podemos reescrever $\vec{E}$ como uma superposição de duas ondas se propagando ao longo da direção x, em sentidos opostos.

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \mathrm{sen}(\alpha x)\cos(\beta t)\widehat{e}_y = \frac{E_0}{2}\mathrm{sen}(\alpha x - \beta t)\widehat{e}_y + \frac{E_0}{2}\mathrm{sen}(\alpha x + \beta t)\widehat{e}_y$$

Questão 4

A onda eletromagnética com campo elétrico $\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{e}_x$ incide sobre um cubo totalmente refletor, com faces de área igual a A, representado na figura abaixo.



(a) (0,5 ponto) Escreva a expressão do campo magnético em termos de E_0, k, ω e c e calcule o vetor de Poynting associado à onda.

(b) (1,0 ponto) Qual é a força que a onda exerce sobre o cubo?

(c) (1,0 ponto) Calcule as densidades médias de energia e momento transportadas pela onda.

Solução da questão 4

(a) O campo magnético é dado por

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c}\cos(kz - \omega t)\widehat{e}_y.$$

O vetor de Poynting é

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} = \epsilon_0 c E_0^2 \cos^2(kz - \omega t)\widehat{e}_z.$$

(b) A força de radiação só é diferente de zero na face contida no plano xy ($z = 0$). Lembrando que a pressão de radiação sobre uma superfície totalmente refletora é $P_{rad} = 2 < S > /c = 2\epsilon_0 E_0^2/2 = \epsilon_0 E_0^2$, obtemos

$$\vec{F} = P_{rad} A\widehat{e}_z = \epsilon_0 E_0^2 A\widehat{e}_z.$$

(c) As densidades médias de energia $< u >$ e momento $< p >$ são dadas, respectivamente, por

$$< u >= \frac{< S >}{c} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \qquad \text{e} \qquad < p >= \frac{< u >}{c} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2c}.$$

Formulário

$$Z=\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2},\quad X_L=\omega L,\quad X_C=\frac{1}{\omega C},\quad \tan\phi=\frac{X_L-X_C}{R},\quad V_m=ZI_m,$$

$$P_{med}=\frac{1}{2}V_mI_m\cos\phi,\quad \frac{V_1}{N_1}=\frac{V_2}{N_2}\quad \text{(transformadores)}.$$

No <u>vácuo</u>: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{A}=\dfrac{q_{int}}{\epsilon_0}$, $\oint \vec{B}\cdot d\vec{A}=0$, $\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell}=-\dfrac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{A}$,

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell}=\mu_0 I+\mu_0\epsilon_0\frac{d}{dt}\int \vec{E}\cdot d\vec{A},\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0},\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0,\quad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},\quad \nabla^2\vec{E}=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2},\quad \nabla^2\vec{B}=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2},\quad c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}},\quad E=cB.$$

Onda senoidal se propagando na direção x: $E=E_m\text{sen}(kx-\omega t+\delta)$,

$$B=B_m\text{sen}(kx-\omega t+\delta),\quad k=\frac{2\pi}{\lambda},\quad \omega=\frac{2\pi}{T}.\quad k\,c=\omega.$$

Vetor de Poynting $\vec{S}=\dfrac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$, $S=uc$, $u=u_e+u_m=\dfrac{\epsilon_0\,E^2}{2}+\dfrac{B^2}{2\mu_0}$.

Para ondas senoidais: $I=<S>=\dfrac{E_m\,B_m}{2\mu_0}$.

Para incidência normal $P_{rad}=\dfrac{2I}{c}$ (reflexão total) e $P_{rad}=\dfrac{I}{c}$ (absorsão total).

Em <u>meios dielétricos</u> basta fazer $\epsilon_0\to\epsilon$, $\mu_0\to\mu$ e $c\to v=\dfrac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ nas fórmulas acima, onde $\epsilon=\kappa\epsilon_0=(1+\chi)\epsilon_0$, e $\mu=\kappa_m\mu_0=(1+\chi_m)\mu_0$.

<u>Expressões úteis:</u>

$$\text{sen}(A)+\text{sen}(B)=2\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\text{sen}(A)-\text{sen}(B)=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{R}=\left(\frac{\partial R_z}{\partial y}-\frac{\partial R_y}{\partial z}\right)\widehat{e}_x+\left(\frac{\partial R_x}{\partial z}-\frac{\partial R_z}{\partial x}\right)\widehat{e}_y+\left(\frac{\partial R_y}{\partial x}-\frac{\partial R_x}{\partial y}\right)\widehat{e}_z$$