P3

Física IV

Escola Politécnica - 2008

FAP 2204 - GABARITO DA P3

25 de novembro de 2008

Questão 1

É realizado um experimento onde fótons são espalhados por elétrons livres inicialmente em repouso. São observados os fótons que emergem em um ângulo $\theta = 90°$ relativamente à direção de incidência e os elétrons de recuo correspondentes.

Na solução dos itens abaixo denomine: λ', o comprimento de onda do fóton espalhado; λ, o comprimento de onda do fóton incidente; ϕ, o ângulo entre o elétron espalhado e a direção de incidência do fóton; $\vec{p}_e$, o vetor momento linear do elétron espalhado.

(a) (1,0 ponto) Use a conservação do momento linear para calcular o módulo do momento linear p_e do elétron espalhado em função de h, λ e λ'. Calcule o comprimento de onda de Broglie λ_e do elétron em função de λ e λ'.

(b) (1,0 ponto) Use a conservação de energia para calcular a energia cinética relativística K_e do elétron em função de h, c, λ e λ'.

(c) (0,5 ponto) Os elétrons espalhados são completamente freiados por uma diferença de potencial V. Expresse a energia cinética K_e em função apenas da carga $\underline{e}$ do elétron e de V. Usando o resultado do item (b) e a equação para o efeito Compton, calcule λ e λ' em função de V, h, c, e e do comprimento de onda de Compton λ_C.

Solução da questão 1

(a) Conservação de momento:

$$\text{direção x:} \qquad \frac{h}{\lambda} = p_e \cos\phi, \tag{1}$$

$$\text{direção y:} \qquad \frac{h}{\lambda'} = p_e \mathrm{sen}\phi. \tag{2}$$

Elevando-se ao quadrado as equações (1) e (1),e considerando que $\cos^2\phi + \mathrm{sen}^2\phi = 1$, resulta

$$\boxed{p_e = h\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{(\lambda')^2}}}. \tag{3}$$

O comprimento de onda de de Broglie é

$$\boxed{\lambda_e = \frac{h}{p_e} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{\lambda^2} + \dfrac{1}{(\lambda')^2}}}}. \tag{4}$$

(b) Conservação de energia:

$$\frac{hc}{\lambda} + m_0c^2 = \frac{hc}{\lambda'} + m_0\gamma c^2, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{5}$$

onde v é a velocidade do elétron. A energia cinética relativística é

$$\boxed{K_e = m_0\gamma c^2 - m_0c^2 = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'}}. \tag{6}$$

(c) Como a diferença de potencial V freia completamente os elétrons, $\boxed{K_e = eV}$. Substituindo na equação (6) vem

$$eV = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} \tag{7}$$

A equação para o efeito Compton, $\lambda' = \lambda + \lambda_C(1 - \cos\theta)$, para $\theta = 90°$ fornece $\lambda' = \lambda + \lambda_C$. Substituindo na equação (7) obtemos

$$\lambda^2 + \lambda_C\lambda - \frac{\lambda_C hc}{eV} = 0,$$

cuja solução é

$$\boxed{\lambda = -\frac{\lambda_C}{2} + \sqrt{\frac{\lambda_C^2}{4} + \frac{\lambda_C hc}{eV}}, \quad \lambda' = \lambda + \lambda_C}.$$

Questão 2

Admita um átomo hidrogenóide constituído por um elétron de carga -e e um núcleo de carga +Ze. São dadas a massa do elétron m, a permissividade do vácuo ϵ_0 e a constante de Planck $\hbar$.

(a) (1,0 ponto) De acordo com a condição de quantização de Bohr, o elétron no estado fundamental tem momento angular $L = \hbar$. Use esta condição para deduzir o raio da órbita do elétron no estado fundamental do átomo hidrogenóide.

Uma estimativa do raio da órbita do elétron no estado fundamental pode ser obtida através do Princípio de Incerteza.

(b) (0,5 ponto) Escreva a expressão para a energia total E do elétron no átomo hidrogenóide, exprimindo a sua energia cinética em termos de seu momento linear p e de sua massa m.

(c) (1,0 ponto) Admita que a incerteza Δr no raio da órbita do elétron é igual ao raio da órbita e que a incerteza no seu momento linear Δp é igual ao momento linear. Use a desigualdade $\Delta r \Delta p \geq \hbar$ (Princípio da Incerteza) para expressar p em função de r e $\hbar$. Substituindo esta expressão na equação da energia total obtida em (b), determine o valor de r que minimiza esta energia.

Solução da questão 2

(a) A força centrípeta que mantém o elétron orbitando em torno do núcleo é devida à força de Coulomb

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

A condição de quantização de Bohr fornece $L = mvr = \hbar \Rightarrow \boxed{v = \hbar/(mr)}$. Substituindo na equação acima obtemos

$$m\frac{\hbar^2}{m^2r^3} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Longrightarrow \boxed{r = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{mZe^2}}$$

(b) A energia total do elétron é

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

(c) Pelo Princípio da Incerteza

$$\Delta p\Delta r \geq \hbar, \quad pr \geq \hbar \Longrightarrow p \geq \hbar/r.$$

Assim, a energia total fica

$$E \geq \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

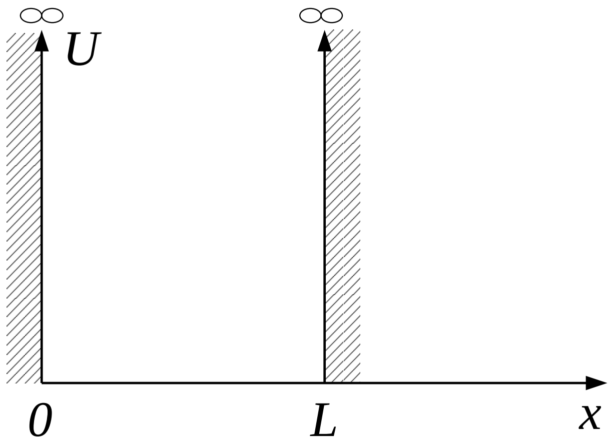
Para minimizar, fazemos $dE/dr = 0$. Resolvendo para r resulta

$$\frac{1}{r} = \frac{mZe^2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2} \Longrightarrow \boxed{r = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{mZe^2}}$$

que é o resultado encontrado no item (a).

Questão 3

Uma partícula de massa m está sujeita a um potencial unidimensional na forma de uma "caixa" de lado L ($U(x) = 0$ para $0 < x < L$, e $U(x) = \infty$ fora deste intervalo), conforme a figura .



As funções de onda normalizadas para este potencial são:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

(a) (1,0 ponto) Determine os níveis de energia desse potencial (mostre claramente como deduziu este resultado).

(b) (0,5 ponto) Esboce um gráfico da função de onda para $n = 2$, indicando os valores de x correspondentes a zeros e pontos de máximos e mínimos da função de onda.

(c) (1,0 ponto) Determine, usando a função de onda para o estado com $n = 2$, a probabilidade de encontrar a partícula na região $3L/4 \leq x \leq L$.

Dado: $\int \mathrm{sen}^2(x)dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\mathrm{sen}(2x)$.

Solução da questão 3

(a) A equação de Schrödinger na região $0 < x < L$ se escreve como

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$$

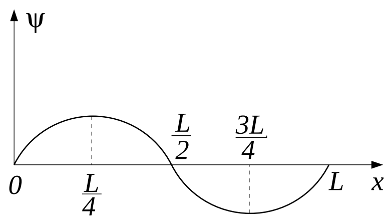
Substituindo a solução dada no problema na equação acima e usando

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{2}{L}}\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

obtemos

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{n^2\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{2}{L}}\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = E_n\sqrt{\frac{2}{L}}\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Longrightarrow \boxed{E_n = \frac{n^2\hbar^2\pi^2}{2mL^2}}$$

(b) Para $n = 2$ o esboço do gráfico da $\psi_2(x)$ é



(c) A probabilidade de encontrarmos a partícula entre $3L/4 \leq x \leq L$ é

$$P = \int_{3L/4}^{L} |\psi_2|^2 dx = \int_{3L/4}^{L} \frac{2}{L}\text{sen}^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{4}$$

Questão 4

O átomo de flúor tem número atômico $Z = 9$.

(a) (1,5 ponto) Escreva a configuração eletrônica do átomo de flúor e os números quânticos n, ℓ, m_ℓ e m_s para cada elétron.

(b) (1,0 ponto) Numa transição entre dois estados o átomo de flúor permanece no estado de maior energia durante um intervalo de tempo $\Delta t = 2,5 \times 10^{-8}$ s antes de emitir um fóton e decair ao estado de menor energia. Qual é a incerteza mínima na energia em elétron-volts daquele estado de maior energia?

Dado: $\hbar = 6,6 \times 10^{-16}$ eV$\cdot$ s.

Formulário

Fótons: $E = hf = hc/\lambda$, $\quad E = pc$.

Expressões relativísticas: $E = m_0\gamma c^2$, $\quad \vec{p} = m_0\gamma\vec{v}$, $\quad E_{cin} = m_0\gamma c^2 - m_0c^2$, onde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

Teoria de de Broglie: $\lambda = h/p$, $\quad f = E/h$.

Efeito Compton: $\lambda' = \lambda + \lambda_C(1 - \cos\theta)$, onde θ é o ângulo entre a direção do fóton espalhado e a direção do fóton incidente e λ_C é o comprimento de onda de Compton.

Princípio de Incerteza: $\Delta p_x\,\Delta x \geq \hbar$, $\quad \Delta E\,\Delta t \geq \hbar$, $\quad \hbar = h/(2\pi)$.

Equação de Schrödinger independente do tempo: $-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x)$.

Alguns números quânticos: $L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar$, $L_z = m_\ell\,\hbar$, $S = \sqrt{s(s+1)}\,\hbar$, $S_z = m_s\,\hbar$.

Solução da questão 4

(a) A configuração eletrônica é $1s^2$, $2s^2$, $2p^5$. Os números quânticos dos elétrons são:

$$
\begin{aligned}
1s^2: &\quad n=1, \quad \ell=0, \quad m_\ell=0, \quad m_s=\pm 1/2 \\
2s^2: &\quad n=2, \quad \ell=0, \quad m_\ell=0, \quad m_s=\pm 1/2 \\
2p^5: &\quad n=2, \quad \ell=1, \quad \begin{cases} m_\ell=-1, \quad m_s=\pm 1/2 \\ m_\ell=0, \quad m_s=\pm 1/2 \\ m_\ell=1, \quad m_s=1/2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

(b) Usando a relação de incerteza para energia e o intervalo de tempo, $\Delta E \Delta t \geq \hbar$, obtemos

$$\Delta E = \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{6,6 \times 10^{-16}}{2,5 \times 10^{-8}} = 2,6 \times 10^{-8} \text{ eV}$$