PR

Física IV

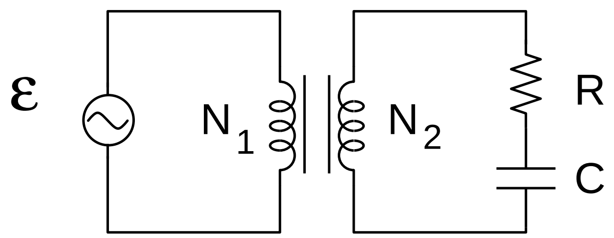
Escola Politécnica - 2008

FAP 2204 - GABARITO DA PR

de fevereiro de 2009

Questão 1

Num transformador ideal o número de espiras no enrolamento primário é $N_1 = 1000$ e no enrolamento secundário é $N_2 = 2000$. O primário é alimentado com um gerador de corrente alternada com voltagem máxima $\mathcal{E} = 100$ V e freqüência angular $\omega = 500$ rd/s. O secundário é ligado a uma combinação em série de um resistor e um capacitor, conforme a figura abaixo.



A corrente máxima no secundário é $I_2 = 5$ A e está defasada de 45° em relação à tensão no secundário.

(a) (1,0 ponto) Determine a voltagem máxima V_2 no secundário e a corrente máxima I_1 no primário.

(b) (1,5 pontos) Desenhe o diagrama de fasores para as voltagens no secundário. Determine as voltagens máximas V_R no resistor e V_C no capacitor. Determine a resistência R e a capacitância C.

Solução da questão 1

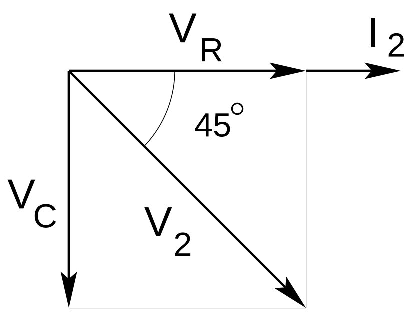
(a) A voltagem máxima no secundário é

$$V_2 = \left(\frac{N_2}{N_1}\right) V_1 = \left(\frac{2000}{1000}\right) 100 = 200 \text{ V}.$$

A corrente máxima no primário é

$$I_1 = \left(\frac{N_2}{N_1}\right) I_2 = \left(\frac{2000}{1000}\right) 5 = 10 \text{ A}.$$

(b) Diagrama de fasores das tensões no secundário:



As tensões máximas no resistor e no capacitores são

$$V_R = V_C = V_2/\sqrt{2} = 100\sqrt{2} \text{ V}.$$

A resistência é

$$R = \frac{V_R}{I_2} = \frac{100\sqrt{2}}{5} = 20\sqrt{2}\ \Omega.$$

A reatância capacitiva e a capacitância são

$$X_C = \frac{V_C}{I_2} = 20\sqrt{2}\ \Omega, \qquad C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{(500)(20\sqrt{2})} = 50\sqrt{2}\ \mu\text{F}.$$

Questão 2

Uma onda eletromagnética plana se propaga no sentido negativo do eixo z com velocidade de 3×10^8 m/s. O comprimento de onda é 3 m, o campo magnético está na direção y e tem o valor de pico de 10^{-8} T.

- (1,5 pontos) Escreva as expressões do campo magnético e do campo elétrico em unidades SI sabendo-se que o campo magnético é máximo em $z = 0,3$ m no instante $t = 0$.
- (1,0 ponto) Escreva a expressão do vetor de Poynting $\mathbf{S}$ como função da posição e do tempo em unidades SI. A partir dessa expressão calcule a intensidade I da onda.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 2}}$

(a) A freqüência é

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{3} = 10^8 \text{ Hz}.$$

O campo magnético é

$$\mathbf{B}(z,t) = \mathbf{e}_y 10^{-8} \cos\left[2\pi\left(z/3 + 10^8 t - 1/10\right)\right] \quad \text{(T)}.$$

O campo elétrico é

$$\mathbf{E}(z,t) = c\,\mathbf{e}_z \times \mathbf{B}(z,t) = \mathbf{e}_x 3 \cos 2\pi\left(z/3 - 10^8 t - 1/10\right) \quad \text{(V/m)}.$$

(b) O vetor de Poynting é

$$\mathbf{S}(z,t) = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} = \left(\frac{3}{40\pi}\right) \cos^2 2\pi\left(z/3 - 10^8 t - 1/10\right)\mathbf{e}_z \quad (\text{W/m}^2).$$

A Intensidade da onda é

$$I = \langle |\mathbf{S}(z,t)| \rangle = \frac{3}{80\pi} \quad \text{W/m}^2,$$

onde usamos que a média num período do quadrado do co-seno é 1/2.

Questão 3

Numa colisão Compton, o elétron, inicialmente em repouso, com energia total $2m_0c^2$, na mesma direção e sentido do fóton incidente (m_0 é a massa de repouso do elétron). Obtenha, como função de m_0, h e c:

(a) (0,5 ponto) a variação da frequência do fóton;

(b) (0,5 ponto) a velocidade do elétron espalhado;

(c) (0,5 ponto) o momento linear do elétron espalhado;

(d) (1,0 ponto) o comprimento de onda do fóton incidente.

Solução da questão 3

(a) A conservação da energia fornece

$$h f_i + m_0 c^2 = h f_f + 2 m_0 c^2 \Longrightarrow \boxed{f_i - f_f = \frac{m_0 c^2}{h}}$$

(b) A energia total do elétron é

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 2 m_0 c^2 \Longrightarrow \sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \boxed{v = \frac{\sqrt{3}}{2}\, c}$$

(c) O momento linear do elétron é

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m_0 \sqrt{3} c/2}{1/2} \Longrightarrow \boxed{p = \sqrt{3}\, m_0\, c}$$

(d) Da conservação do momento vem

$$\frac{h}{\lambda_i} = p - \frac{h}{\lambda_f} \Longrightarrow \frac{h\, f_i}{c} = \sqrt{3}\, m_0\, c - \frac{h\, f_f}{c} \Longrightarrow f_i + f_f = \sqrt{3}\, \frac{m_0 c^2}{h}$$

Usando a equação deduzida no item (a) obtemos

$$\boxed{f_i = (1 + \sqrt{3})\, \frac{m_0 c^2}{h}}$$

Questão 4

A função de onda ψ_0 do estado fundamental do átomo de hidrogênio só depende da distância radial r:

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^2}} e^{-r/a_0}, \quad \text{onde} \quad a_0 = \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m e^2} \quad \text{é o raio de Bohr.}$$

(a) (0,5 ponto) Calcule a densidade de probabilidade radial $P(r)$. Lembre que $P(r)dr$ fornece a probabilidade de encontrarmos o elétron numa casca esférica de raio r e espessura dr.

(b) (1,0 ponto) Para que distância r a probabilidade $P(r)$ é máxima?

(c) (1,0 ponto) Calcule a probabilidade $\mathcal{P}(R)$ de encontrarmos o elétron no estado fundamental dentro de uma esfera de raio R.

Solução da questão 4

(a) A probabilidade de encontrarmos o elétron numa casca esférica de raio r e espessura dr é:

$$P(r)dr = |\psi_0|^2 dV_{casca} = |\psi_0|^2 4\pi r^2 dr = \left(\frac{4r^2}{a_0^3}\right) e^{-2r/a_0} dr$$

$$\Longrightarrow \boxed{P(r) = \left(\frac{4r^2}{a_0^3}\right) e^{-2r/a_0}}$$

(b) O máximo é achado resolvendo-se a equação $dP(r)/dr = 0$.

$$\frac{dP(r)}{dr} = \frac{4}{a_0^3} r^2(-2/a_0)e^{-2r/a_0} + \frac{4}{a_0^3}(2r)e^{-2r/a_0} = \frac{8}{a_0^4} r(a_0 - r)e^{-2r/a_0} = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{r = a_0,}$$

ou seja, o máximo ocorre a uma distância igual ao raio de Bohr.

(c) A probabilidade $\mathcal{P}(R)$ de encontrarmos o elétron dentro de uma esfera de raio R é

$$\mathcal{P}(R) = \int_0^R P(r)dr = \frac{4}{a_0^3}\int_0^R r^2 e^{-2r/a_0} dr = \frac{1}{2}\int_0^{2R/a_0} x^2 e^{-x} dx = -\frac{1}{2}(x^2 + 2x + 2)e^{-x}\Big|_0^{2R/a_0}$$

$$\boxed{\mathcal{P}(R) = 1 - e^{-2R/a_0}\left(\frac{2R^2}{a_0^2} + \frac{2R}{a_0} + 1\right).}$$

Formulário

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \quad X_L = \omega L, \quad X_C = \frac{1}{\omega C}, \quad \tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R}, \quad V_m = Z I_m,$$

$$P_{med} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos\phi, \quad \cos\phi = \frac{R}{Z}, \quad \frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2} \quad \text{(transformadores).}$$

Onda senoidal se propagando na direção x: $E = E_m \text{sen}(kx - \omega t + \delta)$,

$$E = cB, \quad B = B_m \text{sen}(kx - \omega t + \delta), \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}. \quad k\,c = \omega.$$

Vetor de Poynting : $\vec{S} = \dfrac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}, \quad S = uc, \quad u = u_e + u_m = \dfrac{\epsilon_0\, E^2}{2} + \dfrac{B^2}{2\mu_0}, \quad I =< S >$

Fótons : $E = hf = hc/\lambda, \quad E = pc.$

Expressões relativísticas : $E = m_0 \gamma c^2, \quad \vec{p} = m_0 \gamma \vec{v}, \quad E_{cin} = m_0 \gamma c^2 - m_0 c^2$, onde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

Efeito Compton : $\lambda' = \lambda + \lambda_C (1 - \cos\theta)$, onde θ é o ângulo entre a direção do fóton espalhado e a direção do fóton incidente e λ_C é o comprimento de onda de Compton.

Probabilidade de encontrar uma partícula com função de onda $\psi(x, y, z)$ em um volume infinitesimal dV centrado no ponto (x, y, z) é dada por $|\psi(x, y, z)|^2 dV$.