PS

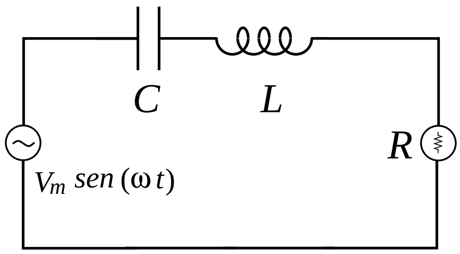
Física IV

Escola Politécnica - 2008

FAP 2204 - GABARITO DA SUB

Questão 1

O circuito RLC mostrado na figura possui de um capacitor com capacitância C, um indutor com indutância variável L e uma lâmpada com resistência R. Os elementos do circuito estão ligados em série a uma fonte de corrente alternada que fornece uma voltagem $V = V_m \text{sen}\omega t$.



(a) (0,5 ponto) Desenhe o diagrama de fasores do circuito, indicando os fasores das voltagens no capacitor, no indutor e na lâmpada e também o fasor da corrente no circuito.

(b) (1,0 ponto) A partir do diagrama do item (a), calcule a amplitude I_m da corrente que passa pelo circuito (dê sua resposta em função de R, C, L, ω e V_m). Calcule também $\cos\phi$, onde ϕ é a defasagem entre a corrente no circuito e a voltagem da fonte (expresse sua resposta em função de R, C, L, ω).

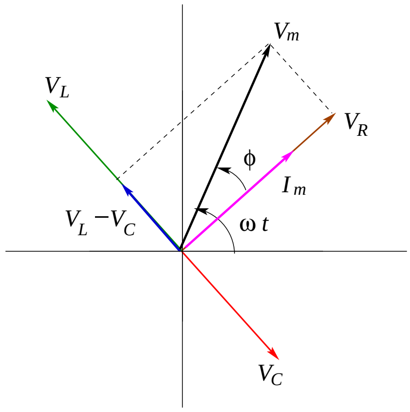
(c) (0,5 ponto) Qual é o valor da indutância L para o qual o brilho da lâmpada é máximo?

(d) (0,5 ponto) Para quais valores de L o brilho da lâmpada fica reduzido pela metade em relação ao valor máximo? (Assuma que o brilho é proporcional à potência dissipada pela lâmpada).

Solução da questão 1

(a)

$$V_R = RI_m, \qquad V_L = \omega L I_m, \qquad V_C = \frac{1}{\omega C} I_m$$



(b) De acordo com o diagrama acima,

$$V_m = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\, I_m \equiv Z I_m$$

e

$$\cos\phi = \frac{V_R}{V_m} = \frac{RI_m}{ZI_m} = \frac{R}{Z}.$$

(c) A potência dissipada na lâmpada é

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos\phi = \frac{1}{2}\frac{RV_m^2}{Z^2} = \frac{1}{2}\frac{RV_m^2}{\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right]}.$$

O brilho será máximo quando $P = P_{\max}$. Isso ocorre na ressonância, ou seja,

$$L = \frac{1}{\omega^2 C}$$

(d) Para que o brilho seja reduzido à metade,

$$P = \frac{P_{\max}}{2} = \frac{1}{2}\frac{V_m^2}{2R}.$$

usando o valor de P obtido no ítem anterior, teremos

$$\frac{1}{2}\frac{RV_m^2}{\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right]} = \frac{1}{2}\frac{V_m^2}{2R}$$

$$\frac{R}{\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right]} = \frac{1}{2R}$$

$$\frac{1}{\left[1 + \frac{1}{R^2}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right]} = \frac{1}{2}$$

Resolvendo para L, teremos

$$L = \frac{1}{\omega^2 C} \pm \frac{R}{\omega}$$

Questão 2

Um laser com potência igual a P watts emite um feixe de luz monocromática com seção reta circular de raio R.

(a) (1,0 ponto) Calcule os valores máximos dos campos elétrico e magnético no feixe.

(b) (1,0 ponto) Se este feixe incide perpendicularmente sobre uma superfície perfeitamente absorvente qual é o momento transferido para a superfície em Δt segundos?

(c) (0,5 ponto) Qual é a força média que o feixe exerce sobre a parede?

Solução da questão 2

(a) O valor médio do vetor de Poynting

$$\langle S\rangle = \frac{1}{2\mu_0}E_m B_m = \frac{1}{2\mu_0 c}E_m^2$$

é igual à potência por unidade de área do feixe. Logo

$$\frac{1}{2\mu_0 c}E_m^2 = \frac{P}{\pi R^2}.$$

Resolvendo para E_m, e usando $B_m = E_m/c$ teremos

$$E_m = \sqrt{\frac{2\mu_0 c P}{\pi R^2}} \quad \text{e} \quad B_m = \sqrt{\frac{2\mu_0 P}{\pi R^2 c}}.$$

(b) Em Δt segundos todo o momento $\Delta\mathcal{P}$ contido num cilindro de altura $c\Delta t$ incide sobre a parede. Usando a densidade de momento $p = u/c = \langle S\rangle/c^2$, teremos

$$\Delta\mathcal{P} = (\pi R^2\, c\Delta t)\frac{\langle S\rangle}{c^2} = (\pi R^2\, \Delta t)\frac{P}{\pi R^2 c} = \frac{P\Delta t}{c}.$$

(c) A força média é

$$\langle F\rangle = \frac{\Delta\mathcal{P}}{\Delta t} = \frac{P}{c}.$$

Questão 3

Luz de comprimento de onda 550 nm é difratada por uma fenda, formando um padrão de difração em uma tela, bem distante, situada a 40 cm da fenda. A distância entre o primeiro e o quinto mínimo de difração é 0.4 mm.

(a) (1,0 ponto) Determine a largura da fenda.

(b) (0,5 ponto) Calcule o ângulo θ do primeiro mínimo de difração.

(c) (1,0 ponto) Calcule a energia dos fótons individuais que atingem com a tela, em unidades de elétron-volts.

Solução da questão 3

(a) Para uma tela a uma grande distância D, teremos $y = D\,\mathrm{sen}(\theta)$. Logo,

$$\Delta y = D\Delta \mathrm{sen}(\theta).$$

Usando a relação para os mínimos e difração por uma fenda de largura a, teremos

$$\Delta y = D\Delta(\frac{m\,\lambda}{a}) = \frac{D\lambda}{a}\Delta m = \frac{D\lambda}{a}(m_2 - m_1).$$

Resolvendo para a,

$$a = \frac{D\lambda}{\Delta y}(m_2 - m_1) = \frac{(400\,\mathrm{mm})(550 \times 10^{-6}\,\mathrm{mm})(5-1)}{0,4\,\mathrm{mm}} = 2,2\,\mathrm{mm}$$

(b) Para $m = 1$

$$\mathrm{sen}(\theta) = \frac{\lambda}{a} = \frac{\Delta y}{(m_2 - m_1)D} = \frac{0,4\,\mathrm{mm}}{4 \times 400\,\mathrm{mm}} = 2.5 \times 10^{-4}.$$

Portanto, $\theta \approx 2.5 \times 10^{-4}\,\mathrm{rad}$

(c)

$$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = (6,6 \times 10^{-34}\mathrm{J}\cdot\mathrm{s})\frac{3 \times 10^{8}\mathrm{m/s}}{550 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}} = 3,6 \times 10^{-19}\mathrm{J} = 2,2\,\mathrm{eV}.$$

Questão 4

Considere o potencial unidimensional

$$U(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

de um oscilador de massa m e freqüência ω.

(a) (1,5 ponto) Suponha que o oscilador esteja no estado estacionário

$$\Psi(x) = C \exp(-ax^2),$$

onde a é uma constante. Levando em conta que a energia E, na equação de Schrödinger, é uma constante, determine o valor de a.

(b) (1,0 ponto) Determine o valor de E no estado $\Psi(x)$ dado no ítem (a) e compare a resposta com o espectro do oscilador.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 4}}$

(a) A equação de Schrödinger independente do tempo é

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\Psi(x) = E\Psi(x)$$

Substituindo $\Psi(x)$ na equação de Schrödinger independente do tempo

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}C\exp(-ax^2) + \frac{1}{2}m\omega^2x^2C\exp(-ax^2) = EC\exp(-ax^2).$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(-2a + 4x^2a^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right]\exp(-ax^2) = E\exp(-ax^2).$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(-2a + 4x^2a^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right] = E \tag{1}$$

Para que E seja independente de x, o coeficiente de x^2 deve se anular. Logo

$$a = \frac{m\omega}{2\hbar} \tag{2}$$

(b) Substituindo (2) em (1), teremos

$$E = \frac{\hbar\omega}{2},$$

que é a energia do estado fundamental do oscilador.

Formulário

Circuito RLC: $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$, $X_L = \omega L$, $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$, $\tan\phi = \dfrac{X_L - X_C}{R}$,

$$V_m = Z I_m, \quad P_{med} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos\phi.$$

Vetor de Poynting: $\vec{S} = \dfrac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$, $S = uc$, $u = u_e + u_m = \dfrac{\epsilon_0 E^2}{2} + \dfrac{B^2}{2\mu_0}$.

Densidade de momento: $p = u/c$.

Para ondas senoidais: $I =< S >= \dfrac{E_m B_m}{2\mu_0}$.

Para incidência normal: $P_{rad} = \dfrac{2I}{c}$ (reflexão total) e $P_{rad} = \dfrac{I}{c}$ (absorsão total).

Difração: $a \operatorname{sen}\theta = m\lambda$, $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3 ...$ (interferência destrutiva)

$I = I_0 \left[\dfrac{\operatorname{sen}(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2$, $\beta = 2\pi a \operatorname{sen}\theta / \lambda$

Fótons: $E_f = hf = hc/\lambda$

Equação de Schrödinger independente do tempo : $-\dfrac{\hbar^2}{2m} \dfrac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x)$.