P1

FÍSICA IV - FAP2204

Escola Politécnica - 2009

GABARITO DA P1

22 de setembro de 2009

Questão 1

Um circuito RLC em série é alimentado por uma fonte que fornece uma tensão $v(t) = V_m \cos \omega t$. O valor da tensão de pico no resistor (V_R) é igual ao valor da tensão de pico no indutor (V_L) e duas vezes maior do que o valor da tensão de pico no capacitor (V_C).

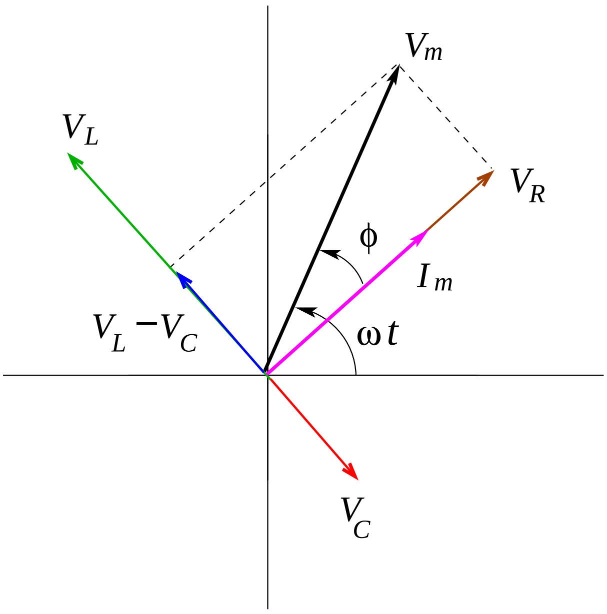
(a) (1,0 ponto) Desenhe o diagrama de fasores do circuito indicando claramente os fasores correspondentes a V_R, V_L, V_C, V_m e I_m (valor de pico da corrente no circuito).

(b) (1,0 ponto) A partir do diagrama de fasores, ou usando complexos, calcule a impedância Z (em módulo) e a defasagem ϕ da corrente em relação à tensão na fonte.

(c) (0,5 ponto) Para qual valor da capacitância C a potência dissipada no circuito é máxima? Expresse sua resposta em termos de ω e L.

Solução da questão 1

(a) Diagrama de fasores



(b) O teorema de Pitágoras no diagrama de fasores fornece

$$V_m = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2}$$

A impedância do circuito $Z = V_m/I_m$. Usando as relações

$$V_R = RI_m, \quad V_L = X_L I_m = \omega L\, I_m, \quad V_C = X_C I_m = \frac{1}{\omega C} I_m,$$

e a expressão para V_m obtemos

$$Z = \frac{V_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}.$$

Do diagrama de fasores vem

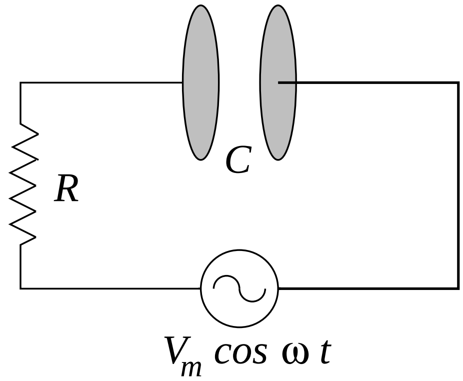
$$\boxed{\tan\phi = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{1}{2}},$$

onde usamos $V_R = V_L = 2V_C$.

(c) A máxima potência dissipada pelo circuito vai ocorrer na ressonância. Neste caso $X_L = X_C$ e $\boxed{C = 1/(\omega^2 L)}$.

Questão 2

O circuito RC mostrado na figura abaixo está ligada a uma fonte de corrente alternada que fornece uma tensão $v(t) = V_m \cos \omega t$.



(a) (0,5 ponto) Qual é a impedância (em módulo) do circuito e o valor de pico da corrente que por ele circula?

(b) (1,0 ponto) Calcule a razão V_C/V_m entre os valores de pico das tensões no capacitor e na fonte. Se tomarmos a tensão de saída entre os terminais do capacitor, o circuito funciona como um filtro passa-baixas ou como um filtro passa-altas?

(c) (1,0 ponto) O capacitor da figura é formado por duas placas circulares de raio r no vácuo. Ignore o efeito de bordas. Seja $Q(t) = Q_m \text{sen}(\omega t + \phi)$, onde Q_m é constante, a carga em uma das placas do capacitor. Calcule a corrente de deslocamento I_D entre as placas do capacitor. Dado: o campo elétrico entre as placas do capacitor $E = \sigma/\epsilon_0$, onde σ é a densidade superficial de carga na placa do capacitor.

Solução da questão 2

(a) A impedância do circuito é dada por

$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}$$

A corrente máxima é

$$\boxed{I_m = \frac{V_m}{Z} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}}$$

(b) A voltagem máxima no capacitor é $V_C = X_C I_m = (1/\omega C)\, I_m$. Usando o valor de I_m calculado no item (a) obtemos

$$V_C = \frac{1}{\omega C} \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\frac{V_C}{V_m} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}}$$

Note que

$$\frac{V_C}{V_m} = \begin{cases} 1 & \text{para} \quad \omega \longrightarrow 0 \\ 0 & \text{para} \quad \omega \longrightarrow \infty \end{cases}$$

Assim, o circuito funciona como um **filtro passa-baixas**.

(c) A corrente de deslocamento através de uma superfície S é dada por

$$I_D = \epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt},$$

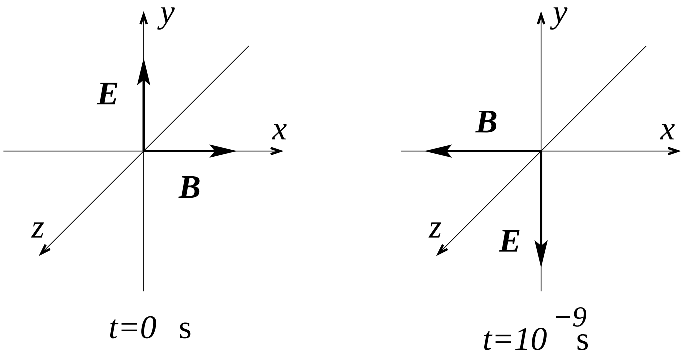
onde $\Phi_e \equiv \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$ é o fluxo do campo elétrico através de S. Escolhendo S como um círculo de raio r, paralelo e coaxial às placas do capacitor e lembrando que o campo elétrico dentro do capacitor é dado por $E = \sigma/\epsilon_0 = Q/(\epsilon_0 \pi r^2)$ obtemos

$$\Phi_e = E\,\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0 \pi r^2} \pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Longrightarrow \boxed{I_D = \epsilon_0 \frac{d(Q/\epsilon_0)}{dt} = \frac{dQ}{dt} = I = Q_m \omega \cos(\omega t + \phi)}$$

Note que a corrente de deslocamento é numericamente igual à corrente I através do circuito.

Questão 3

A figura abaixo representa os campos elétrico $\vec{E}$ e magnético $\vec{B}$ de uma onda eletromagnética plana monocromática, no vácuo, na origem do sistema de coordenadas em dois instantes diferentes. O campo elétrico está na direção do eixo y vale em módulo 1 V/m no instante $t = 0$ s e $\sqrt{3}$ V/m no instante $t = 10^{-9}$ s. A freqüência da onda é $f = 0,25 \times 10^9$ Hz. São dadas ainda a velocidade da luz $c = 3 \times 10^8$ m/s e a permeabilidade magnética no vácuo $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m.



(a) (0,5 ponto) Determine o comprimento de onda λ, a freqüência angular ω e o número de onda k.

(b) (1,0 ponto) Usando a figura e os valores em módulo do campo elétrico nos instante $t = 0$ s e $t = 10^{-9}$, determine E_m, a constante de fase ϕ (veja o formulário) e escreva a expressão do campo elétrico $\vec{E}$ dessa onda.

(c) (1,0 ponto) Determine o campo magnético $\vec{B}$, o vetor de Poynting $\vec{S}$ e a intensidade I da onda.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 3}}$

(a) Comprimento de onda

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{0,25 \times 10^9 \text{ Hz}} \longrightarrow \boxed{\lambda = 1,2 \text{ m}}.$$

Freqüência angular

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(0,25 \times 10^9 \text{ Hz}) \longrightarrow \boxed{\omega = 5\pi \times 10^8 \text{ rd/s}}.$$

Número de onda

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{5\pi}{3} \text{ m}^{-1}}.$$

(b) O campo elétrico tem a forma

$$\vec{E}(z,t) = E_m \cos(kz + \omega t + \phi)\,\vec{\jmath}.$$

São dados

$$E_y(0,0) = E_m \cos\phi = 1 \text{ V/m},$$
$$E_y(0, 10^{-9} \text{ s}) = E_m \cos(\pi/2 + \phi) = -E_{\max} \operatorname{sen}\phi = -\sqrt{3} \text{ V/m}.$$

Logo $\boxed{\phi = \pi/3}$, $\boxed{E_m = 2 \text{ V/m}}$, e

$$\boxed{\vec{E}(z,t) = 2\cos\left[5\pi\left(\frac{z}{3} + 10^8 t + \frac{1}{15}\right)\right]\vec{\jmath} \qquad \text{(V/m)}}.$$

(c) Campo magnético

$$\boxed{\vec{B} = \frac{(-\vec{k}) \times \vec{E}}{c} = \left(\frac{2}{3} \times 10^{-8}\right)\cos\left[5\pi\left(\frac{z}{3} + 10^8 t + \frac{1}{30}\right)\right]\vec{\imath} \qquad \text{(T)}}.$$

Vetor de Poynting

$$\boxed{\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = -\frac{1}{30\pi}\cos^2\left[5\pi\left(\frac{z}{3} + 10^8 t + \frac{1}{30}\right)\right]\vec{k} \qquad (\text{W/m}^2)}.$$

Intensidade

$$\boxed{I = \langle|\vec{S}|\rangle = \frac{1}{60\pi} \qquad (\text{W/m}^2)}.$$

Questão 4

Uma nave espacial é impulsionada por uma "vela" que reflete a luz do Sol. A vela tem a forma de um quadrado com lados de 1Km de comprimento, é perfeitamente refletora e está sempre orientada perpendicularmente à luz do Sol. Suponha que nas vizinhanças da Terra a intensidade da luz solar $I = 1,35 \times 10^3$ W/m^2.

(a) (1,0 ponto) Calcule a pressão de radiação exercida pela luz solar sobre a vela próximo da Terra? Dado: a velocidade da luz $c = 3 \times 10^8$ m/s.

(b) (1,0 ponto) Se a massa da nave $M = 4,5$ toneladas, calcule a aceleração a da nave produzida pela força de radiação.

(c) (0,5 ponto) Ignorando-se os efeitos da atração gravitacional, calcule o tempo gasto em dias para percorrer uma distância equivalente à separação Terra-Lua (360.000 km) partindo do repouso. Dado: 1s $= 1,2 \times 10^{-5}$ dias.

Formulário

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \quad X_L = \omega L, \quad X_C = \frac{1}{\omega C}, \quad \tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R}, \quad V_m = Z I_m,$$

$$P_{med} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos\phi, \quad \frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2} \text{ (transformadores).}$$

No vácuo: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A},$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}, \quad E = cB.$$

Corrente de Deslocamento: $I_D = \epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt}$ onde $\Phi_e = \int \vec{E} \cdot d\vec{A},$

Onda plana monocromática se propagando na direção +x: $\vec{E} = E_m \cos(kx - \omega t + \phi)\hat{e}_y,$

$$\vec{B} = B_m \cos(kx - \omega t + \phi)\hat{e}_z, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}. \quad k\,c = \omega.$$

Vetor de Poynting $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}, \quad S = uc, \quad u = u_e + u_m = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}.$

Para ondas senoidais: $I = \langle S \rangle = \frac{E_m B_m}{2\mu_0}$, media temporal: $\langle cos^2(kx - \omega t + \phi) \rangle = 1/2.$

Pressão de radiação (incidência normal): $P_{rad} = \frac{2I}{c}$ (reflexão total) e $P_{rad} = \frac{I}{c}$ (absorsão total).

Solução da questão 4

(a) Para uma superfície completamente refletora a pressão de radiação é

$$\mathcal{P} = \frac{2I}{c} = \frac{2 \times 1350}{3 \times 10^8} \Longrightarrow \boxed{\mathcal{P} = 9 \times 10^{-6}\ \mathrm{N/m^2}}$$

(b) A força F que a radiação exerce sobre a área A da vela é

$$F = \mathcal{P}A = Ma \Longrightarrow a = \frac{\mathcal{P}A}{M} = \frac{(9 \times 10^{-6}) \cdot (10^6)}{4,5 \times 10^3} \Longrightarrow \boxed{a = 2 \times 10^{-3}\mathrm{m/s^2}}$$

(c) Supondo que a pressão de radiação permaneça aproximadamente constante durante a viagem, o movimento da nave será retilíneo e uniformemente acelerado.

$$\Delta S = \frac{1}{2}at^2 \Longrightarrow t = \sqrt{\frac{2\,\Delta S}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (3,6 \times 10^8)}{2 \times 10^{-3}}} \Longrightarrow \boxed{t = 6 \times 10^5\ \mathrm{s} \approx 7,2\ \mathrm{dias}}$$