P2

Física IV

Escola Politécnica - 2009

FAP 2204 - GABARITO DA P2

6 de novembro de 2009

Questão 1

Uma película de óleo de silicone flutuando sobre água é iluminada por uma luz branca a partir do ar. A luz refletida perpendicularmente até um ponto P acima da película é observada. Os índices de refração do ar (n_{ar}), da água ($n_{\text{água}}$) e do óleo ($n_{\text{óleo}}$) são praticamente independentes do comprimento de onda no intervalo do espectro visível $380\,\text{nm} < \lambda < 750\,\text{nm}$. São dadas a espessura $d > 0$ da película, o índice de refração do ar $n_{\text{ar}} = 1$ e que $n_{\text{ar}} < n_{\text{água}} < n_{\text{óleo}}$.

(a) (0,5 ponto) Para luz de comprimento de onda λ (no vácuo), calcule a diferença de fase no ponto P entre as ondas refletidas nas interfaces ar-óleo e óleo-água em termos de d, λ e $n_{\text{óleo}}$.

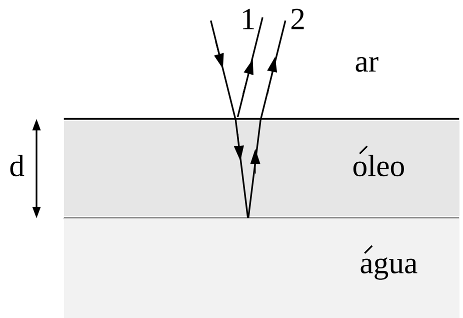
(b) (1,0 ponto) Determine as condições para que ocorra interferência construtiva e destrutiva no ponto P em termos de d, λ e $n_{\text{óleo}}$.

(c) (0,5 ponto) Determine o comprimento de onda máximo, λ_{max}, acima do qual não ocorrem interferências construtivas. Escreva sua resposta em termos da espessura d e do índice de refração $n_{\text{óleo}}$ da película.

(d) (0,5 ponto) Determine a espessura $d_0 > 0$ abaixo da qual nenhum comprimento de onda do espectro visível será intensificado.Expresse a resposta em termos de $n_{\text{óleo}}$.

Solução da questão 1

(a) Como $n_{\text{ar}} < n_{\text{óleo}}$, há uma mudança de fase de π na reflexão do raio 1.



Por outro lado, como $n_{\text{óleo}} > n_{\text{água}}$, não há defasagem de π na reflexão do raio 2. A mudança de fase é devida apenas à distância extra $2d$ que o raio 2 percorre em relação ao raio 1. A diferença de fase entre os raios 2 e 1 é

$$\Delta\phi = 2k_{\text{óleo}}d - \pi = 2\frac{2\pi}{\lambda/n_{\text{óleo}}}d - \pi \Longrightarrow \boxed{\Delta\phi = \frac{4\pi d n_{\text{óleo}}}{\lambda} - \pi}$$

(b) As condições de interferência construtiva e destrutiva serão, respectivamente

$$\underline{\text{Construtiva:}} \quad \Delta\phi = \frac{4\pi d n_{\text{óleo}}}{\lambda} - \pi = 2m\pi \Longrightarrow \boxed{\frac{2dn_{\text{óleo}}}{\lambda} = m + \frac{1}{2}}$$

$$\underline{\text{Destrutiva:}} \quad \Delta\phi = \frac{4\pi d n_{\text{óleo}}}{\lambda} - \pi = (2m+1)\pi \Longrightarrow \boxed{\frac{2dn_{\text{óleo}}}{\lambda} = m + 1}$$

com $m = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$

(c) Usando a condição para interferência construtiva, teremos

$$\lambda = \frac{2dn_{\text{óleo}}}{m + \frac{1}{2}} \Longrightarrow \boxed{\lambda_{max} = 4dn_{\text{óleo}}}\,,$$

onde usamos $m = 0$ para obter o maior λ possível.

(d) A condição para interferência construtiva fornece

$$d = \frac{\lambda(m + \frac{1}{2})}{2n_{\text{óleo}}} \Longrightarrow \boxed{d_0 = \frac{95}{n_{\text{óleo}}}\,\text{nm}}\,,$$

onde d_0 foi obtido com $m = 0$ e $\lambda = 380$ nm (limite violeta do espectro visível).

Questão 2

Uma fenda de largura a é iluminada por luz branca, emitida por uma fonte coerente situada a uma grande distância da fenda. A luz difratada é observada em uma tela distante (as condições de *difração de Fraunhofer* são satisfeitas).

(a) (1,0 ponto) Para qual valor de a o *primeiro mínimo* de uma componente vermelha ($\lambda = 628$ nm) ocorrerá em um ângulo $\theta = \pi/100$ rad? Lembre-se que para $\theta << 1$, $\text{sen}\theta \approx \theta$.

(b) (1,0 ponto) Uma componente da luz branca, de comprimento de onda λ', produz o *primeiro máximo lateral* de difração em $\theta = \pi/100$ rad. Utilizando o valor da largura da fenda determinado no item (a), calcule o comprimento de onda λ'. Observação: use a aproximação de que um máximo lateral está situado à meia distância de dois mínimos adjacentes.

Qual é a energia dos fótons individuais da componente λ'? Dado: constante de Planck $h = 6,63 \times 10^{-34}$ J·s.

(c) (0,5 ponto) Determine a razão entre a intensidade do primeiro máximo lateral e a intensidade I_0 do máximo central produzidos por λ'.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 2}}$

(a) A condição $a\,\text{sen}\theta = m\lambda$ ($m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$) é satisfeita nos mínimos de difração. Portanto, usando $m = 1$, $\lambda = 628$ nm e $\text{sen}\theta = \text{sen}(\pi/100) \approx \pi/100$, obtemos

$$a = \frac{m\lambda}{\text{sen}\theta} \approx \frac{628 \times 100}{\pi} = 2,0 \times 10^4 \,\text{nm} = 2,0 \times 10^{-2}\,\text{mm}.$$

(b) O primeiro máximo situa-se aproximadamente entre os mínimos correspondentes a $m = 1$ e $m = 2$. Então,

$$a\,\text{sen}\theta_{max} \approx \frac{a\,\text{sen}\theta_2 + a\,\text{sen}\theta_1}{2} = \frac{2\lambda' + \lambda'}{2} = 1,5\lambda'.$$

Quando θ_{max} é $\theta = \pi/100$ rad, sabemos que $a\,\text{sen}\theta_{max} = \lambda = 628$ nm (item (a)). Logo,

$$\lambda' = \frac{\lambda}{1,5} = \frac{628}{1,5} = 419\,\text{nm}.$$

A energia do fóton é

$$E = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3,0 \times 10^8}{419} = 4,7 \times 10^{-19}\,\text{J}.$$

(c) A intensidade da figura de difração para λ' é

$$I = I_0 \left(\frac{\text{sen}\beta/2}{\beta/2}\right)^2; \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda'} a\text{sen}\theta.$$

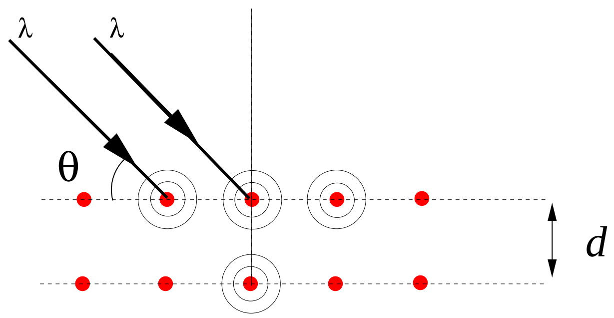
Quando o ângulo é θ_{max}, sabemos que $a\,\text{sen}\theta_{max} = \lambda = 1,5\lambda' = 3\lambda'/2$ nm. Logo,

$$\frac{I(\theta_{max})}{I(0)} = \left(\frac{\text{sen}(\pi\lambda/\lambda')}{\pi\lambda/\lambda'}\right)^2 = \left(\frac{\text{sen}(3\pi/2)}{3\pi/2}\right)^2 = \frac{4}{9\pi^2} = 0.045$$

Questão 3

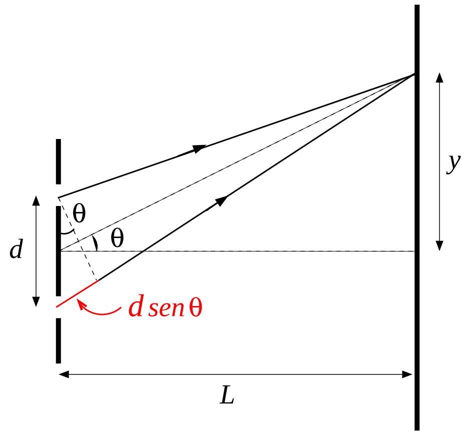
(I) (1,5 ponto) Numa experiência de Young, duas fendas separadas de $1,5$ mm, são iluminadas com luz de comprimento de onda igual a 600 nm. As franjas brilhantes de interferência são observadas em um anteparo a uma distância de 3 m do plano das fendas. Determine o espaçamento entre estas franjas.

(II) (1,0 ponto) Deduza a condição de interferência construtiva para um raio X de comprimento de onda λ incidindo num cristal formando um ângulo θ com os planos cristalinos espaçados de d, conforme mostra a figura.



Solução da questão 3

(I) Observando a figura abaixo vemos que os máximos de interferência (franjas) são obtidos quando $d\text{sen}\theta = m\lambda\,, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$



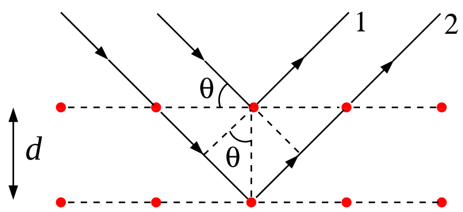
Como $L >> y$, $sen\theta \approx \tan\theta = y/L$ e podemos reescrever as condições de máximo como interferência (franjas) são obtidos quando

$$d\frac{y}{L} = m\lambda\,, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

O espaçamento Δy entre as franjas é igual a

$$\Delta y = y_{m+1} - y_m = \frac{\lambda L}{d}(m + 1 - m) \Longrightarrow \boxed{\Delta y = \frac{\lambda L}{d} = \frac{(6 \times 10^{-7})3}{1,5 \times 10^{-3}} = 1,2 \times 10^{-3}\text{m}}$$

(II) A diferença de percurso entre os raios 1 e 2 na figura abaixo é $2dsen\theta$.



A condição para haver interferência construtiva é

$$\boxed{2dsen\theta = m\lambda\,, \quad m = 1, 2, 3, ... \quad \text{(Lei de Bragg)}}$$

Questão 4

Duas esferas aquecidas, ambas se comportando como corpos negros, irradiam a mesma potência. A mais fria delas tem uma temperatura de superfície T_f e seu raio é a vezes maior do que a mais quente.

(a) (1,0 ponto) Qual é a temperatura T_q da esfera mais quente em termos de T_f e a?

(b) (1,5 ponto) Considere os comprimentos de onda correspondentes aos picos de intensidade. Calcule a razão entre o comprimento de onda de pico emitido pela esfera mais quente e o comprimento de onda de pico emitido pela esfera mais fria.

Solução da questão 4

(a) De acordo com a lei de Stefan-Boltzmann a energia total emitida por unidade de área, por unidade de tempo é $I = \sigma T^4$. Como as esferas irradiam a mesma potência, teremos

$$\sigma(4\pi R_q^2)T_q^4 = \sigma(4\pi R_f^2)T_f^4 = \sigma(4\pi(aR_q)^2)T_f^4 \Rightarrow T_q = \sqrt{a}T_f.$$

(b) De acordo com a lei de Wien, o comprimento de onda correspondente ao pico de intensidade é tal que $\lambda T =$ constante. Portanto,

$$\lambda_q T_q = \lambda_f T_f \Rightarrow \frac{\lambda_q}{\lambda_f} = \frac{T_f}{T_q} = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Formulário

Interferência com duas fendas:

$d\text{sen}\theta = m\lambda \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

$d\text{sen}\theta = (m + 1/2)\lambda \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

$I = I_0 \cos^2(\phi/2), \quad \phi = 2\pi d \,\text{sen}\,\theta/\lambda$

Difração:

$a\,\text{sen}\,\theta = m\lambda, \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3...$

$I = I_0 \left[\frac{\text{sen}\,(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2, \quad \beta = 2\pi a\,\text{sen}\,\theta/\lambda$

Corpo Negro

Intensidade total $I = \sigma T^4, \quad \lambda_m T = \text{constante}$

Efeito fotoelétrico:

$E_f = hf = hc/\lambda, \quad E_{cin}^{max} = hf - \phi$