P3

Física IV - FAP2204

Escola Politécnica - 2009

GABARITO DA P3

8 de dezembro de 2009

Questão 1

Numa experiência de espalhamento Compton, um elétron de massa m_0 em repouso espalha um fóton de comprimento de onda $\lambda = 2\lambda_C$, onde $\lambda_C = h/(m_0 c)$ é comprimento de onda de Compton do elétron. Após o espalhamento, o fóton perde metade de sua energia.

(a) (1,0 ponto) Calcule o comprimento de onda do fóton espalhado (expresse seu resultado em função de λ_C apenas) e seu ângulo de espalhamento.

(b) (1,0 ponto) Calcule a energia do elétron após a colisão em função de m_0 e c.

(c) (0,5 ponto) Calcule o comprimento de onda de de Broglie do elétron após a colisão. Escreva seu resultado em função de h, m_0 e c. Observação: utilize o momento relativístico para o elétron.

Solução da questão 1

(a) A energia do fóton é dada por $E_\gamma = hc/\lambda$. Como o fóton perdeu metade de sua energia após a colisão,

$$\frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{2\lambda} \Longrightarrow \boxed{\lambda' = 2\lambda = 4\lambda_C}.$$

A fórmula de Compton permite calcular o ângulo de espalhamento

$$\lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos\theta) \Longrightarrow 2\lambda_C = \lambda_C(1 - \cos\theta) \Longrightarrow \boxed{\theta = \pi}.$$

(b) A conservação de energia fornece (E_e é a energia do elétron após o espalhamento)

$$\frac{hc}{\lambda} + m_0c^2 = \frac{hc}{\lambda'} + E_e \Longrightarrow \frac{hc}{2\lambda_C} + m_0c^2 = \frac{hc}{4\lambda_C} + E_e$$

$$\Longrightarrow E_e = \frac{hc}{4\lambda_C} + m_0c^2 \Longrightarrow \boxed{E_e = \frac{5}{4}m_0c^2}$$

(c) Usando $E_e = \sqrt{(p_ec)^2 + (m_0c^2)^2}$ obtemos

$$p_e = \frac{\sqrt{E_e^2 - m_0^2c^4}}{c} = \frac{3}{4}m_0c,$$

ou, usando a conservação de momento,

$$p_\gamma = -p'_\gamma + p_e \Longrightarrow p_e = \frac{h}{\lambda} + \frac{hc}{\lambda'} = \frac{3}{4}m_0c.$$

O comprimento de onda de de Broglie do elétron é

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{p_e} = \frac{4h}{3m_0c}}$$

Questão 2

Uma partícula de massa m move-se em uma órbita *circular* sujeita a uma força central elástica *atrativa* de módulo $F = Kr$, onde $K > 0$ é a constante de mola e r é a distância ao centro.

(a) (1,0 ponto) Usando a segunda lei de Newton, expresse o módulo da velocidade v em função de r, K e m. Use este resultado e a condição de quantização do momento angular de Bohr ($L = n\hbar$) para calcular os raios das órbitas estáveis em função de n, $\hbar$, m e K.

(b) (0,5 ponto) A energia total da partícula é dada por

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Kr^2.$$

Expresse a energia E em função de K e r apenas. Use os raios calculados no item (a) para obter as energias do sistema nas órbitas estáveis.

(c) (0,5 ponto) Determine a frequência da radiação emitida numa transição entre estados vizinhos ($n + 1 \longrightarrow n$) em função de m e K.

(d) (0,5 ponto) Calcule o comprimento de onda de de Broglie associado à partícula em um estado de energia correspondente ao número quântico $n = 2$ em função de $\hbar$, m e K.

Solução da questão 2

(a) A segunda lei de Newton fornece

$$F = Kr = m\frac{v^2}{r} \Longrightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{K}{m}}\, r}\,.$$

Usando esta expressão e a condição de quantização de Bohr obtemos

$$mvr = n\hbar \Longrightarrow r = \frac{n\hbar}{mv} \Longrightarrow r = \frac{n\hbar}{\sqrt{mK}r} \Longrightarrow \boxed{r_n^2 = \frac{n\hbar}{\sqrt{mK}}}$$

(b) A expressão de v em função de r, encontrada no item (a), permite reescrever a energia de uma forma mais simples.

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Kr^2 = Kr^2.$$

Substituindo a expressão para os r permitidos, calculada no item (a), chegamos a

$$\boxed{E_n = Kr_n^2 = \sqrt{\frac{K}{m}}\hbar n}$$

(c) A energia da radiação emitida na transição é igual à diferença de energia entre os níveis.

$$hf = E_{n+1} - E_n = \sqrt{\frac{K}{m}}\hbar = \sqrt{\frac{K}{m}}\frac{h}{2\pi} \Longrightarrow \boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}}$$

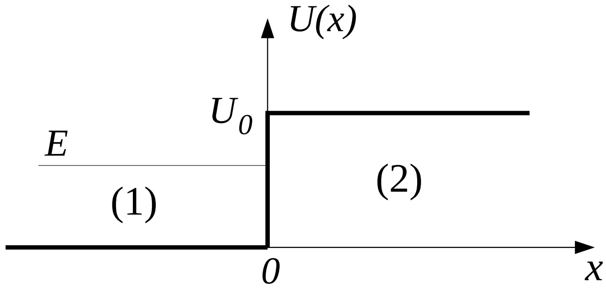
(d) O comprimento de onda de de Broglie na enésima órbita é

$$\lambda_n = \frac{h}{mv} = \frac{hr_n}{n\hbar} = \frac{2\pi}{\sqrt{n}}\frac{\sqrt{\hbar}}{(mK)^{1/4}} \Longrightarrow \boxed{\lambda_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{\hbar}}{(mK)^{1/4}}}$$

Questão 3

Uma partícula de massa m e energia constante E ($0 < E < U_0$), move-se ao longo do eixo x e através de valores negativos de x, aproxima-se da barreira de potencial

$$U(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ U_0 & x \geq 0 \end{cases}$$



(a) (0,5 ponto) Escreva a equação de Schrödinger independente do tempo desta partícula para $x < 0$ (região (1)) e para $x \geq 0$ (região (2)).

(b) (1,0 ponto) Determine as soluções gerais da equação de Schrödinger em cada uma das regiões. Imponha, em seguida, a condição de que a função de onda seja finita.

(c) (0,5 ponto) Imponha as condições de continuidade da função de onda e de sua derivada. Não é necessário resolver estas equações.

(d) (0,5 ponto) É possível a partícula penetrar na barreira, isto é ser encontrada na região (2) ($x > 0$)? Justifique e esboce o gráfico da função de onda.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 3}}$

(a) A equação de Schrödinger na região (1) é

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_1}{dx^2} = E\psi_1 \Longleftrightarrow \frac{d^2\psi_1}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi_1 \equiv -k_1^2\psi_1$$

A equação de Schrödinger na região (2) é

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + U_0\psi_2 = E\psi_2 \Longleftrightarrow \frac{d^2\psi_2}{dx^2} = \frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}\psi_2 \equiv k_2^2\psi_2$$

(b) A função de onda na região (1) é

$$\psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}, \qquad k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Uma solução equivalente é $\psi_1(x) = a\,\cos(k_1x) + b\,\text{sen}(k_1x)$.

A função de onda na região (2) é

$$\psi_2(x) = Ce^{-k_2x}, \qquad k_2 = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$$

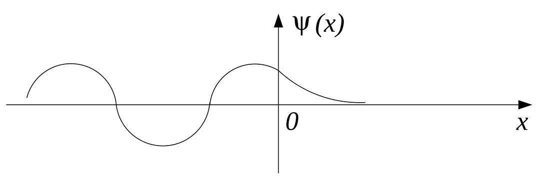
A solução e^{+k_2x} não é aceitável porque ela diverge quando $x \to \infty$.

(c) As condições de continuidade fornecem

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \Longrightarrow A + B = C,$$
$$\left.\frac{d\psi_1}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{d\psi_2}{dx}\right|_{x=0} \Longrightarrow ik_1(A - B) = -k_2C.$$

(Ou, se usarmos senos e cossenos, $a = C$ e $b\,k_1 = -k_2\,C$.)

(d) A partícula pode penetrar na barreira porque a função de onda é diferente de zero para $x \geq 0$ (região (2)).



Questão 4

Num átomo neutro no estado fundamental as camadas $n = 1$ e $n = 2$ estão totalmente preenchidas. Além disto, há 6 elétrons na camada $n = 3$.

(a) (1,0 ponto) Determine os números quânticos n, ℓ, m_ℓ e m_s de todos os elétrons e o número atômico Z deste átomo.

(b) (1,0 ponto) Quais são os valores possíveis do módulo do momento angular orbital e sua projeção sobre o eixo z para um elétron deste átomo?

(c) (0,5 ponto) Quais são os valores possíveis do módulo do momento angular de spin e sua projeção sobre o eixo z para um elétron deste átomo?

Formulário

Fótons: $E = hf = hc/\lambda, \quad E = pc.$

Expressões relativísticas: $E = m_0\gamma c^2, \quad \vec{p} = m_0\gamma\vec{v}, \quad E_{cin} = m_0\gamma c^2 - m_0c^2$, onde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, $E = \sqrt{(pc)^2 + (m_0c^2)^2}$.

Teoria de de Broglie: $\lambda = h/p, \quad f = E/h.$

Efeito Compton: $\lambda' = \lambda + \lambda_C(1 - \cos\theta)$, onde θ é o ângulo entre a direção do fóton espalhado e a direção do fóton incidente e $\lambda_C = h/(m_0c)$ é o comprimento de onda de Compton do elétron.

Princípio de Incerteza: $\Delta p_x \, \Delta x \geq \hbar, \quad \Delta E \, \Delta t \geq \hbar, \quad \hbar = h/(2\pi).$

Equação de Schrödinger independente do tempo: $-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x).$

Alguns números quânticos: $L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar,\ L_z = m_\ell\,\hbar,\ S = \sqrt{s(s+1)}\,\hbar,\ S_z = m_s\,\hbar.$

Solução da questão 4

(a) Os números quânticos são

n	ℓ	m_ℓ	m_s	elétrons
1	0	0	$\pm 1/2$	2
2	0	0	$\pm 1/2$	2
	1	$-1, 0, 1$	$\pm 1/2$	6
3	0	0	$\pm 1/2$	2
	1	$-1, 0, 1$	$\pm 1/2$	4

O número total de elétrons é 16. Como o átomo é neutro, $Z = 16$. Observação: na subcamada 3p há dois spins emparelhados em um dos orbitais e dois spins paralelos nos dois orbitais restantes.

(b) Para este átomo $\ell = 0$ ou $\ell = 1$. Lembrando que $L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar$ e $L_z = m_\ell \hbar$ temos

$$\ell = 0 \Rightarrow \begin{cases} L = 0 \\ L_z = 0 \end{cases} \qquad \ell = 1 \Rightarrow \begin{cases} L = \sqrt{2}\hbar \\ L_z = -\hbar, 0, \hbar \end{cases}$$

(c) O módulo do momento angular de spin assume apenas um valor $S = \sqrt{s(s+1)}\hbar = \hbar\sqrt{3}/2$ e sua projeção os valores $S_z = m_s \hbar = \pm\hbar/2$.