PR

Física IV - FAP2204

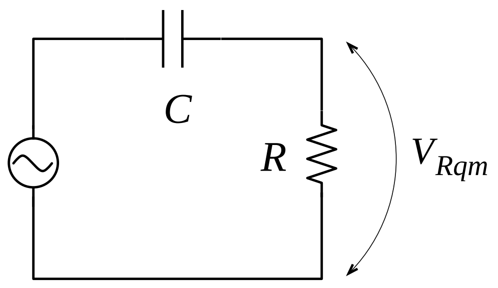
Escola Politécnica - 2010

GABARITO DA PR

2 de fevereiro de 2010

Questão 1

No circuito abaixo o gerador de corrente alternada com freqüência angular $\omega = 500$ rd/s fornece uma tensão eficaz (quadrática média) $V_{qm} = 50$ V. A potência média dissipada no resistor é $P_{méd} = 60$ W. A tensão eficaz no resistor é $V_{Rqm} = 30$ V.



(a) (1,0 ponto) Determine a corrente eficaz I_{qm} no circuito e a resistência R.

(b) (1,0 ponto) Determine a tensão eficaz V_{Cqm} no capacitor e a capacitância C.

(c) (0,5 pontos) Determine a impedância (em módulo) e o fator de potência da associação RC em série.

Solução da questão 1

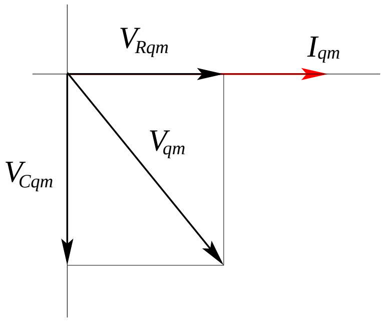
(a) No resistor a corrente eficaz é

$$I_{qm} = \frac{P_{méd}}{V_{Rqm}} = \frac{60}{30} = 2 \text{ A}.$$

Resistência

$$R = \frac{V_{Rqm}}{I_{qm}} = \frac{30}{2} = 15 \ \Omega.$$

(b) Podemos construir o diagrama de fasores usando os valores eficazes que diferem dos valores de pico apenas por um fator $1/\sqrt{2}$.



Tensão eficaz no capacitor

$$V_{Cqm} = \sqrt{V_{qm}^2 - V_{Rqm}^2} = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40 \text{ V}.$$

Reatância capacitiva

$$X_C = \frac{V_{Cqm}}{I_{qm}} = \frac{40}{2} = 20 \ \Omega.$$

Capacitância

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{(500)(20)} = 10^{-4} \text{ F}.$$

(c) Módulo da impedância da associação RC

$$Z = \frac{V_{qm}}{I_{qm}} = \frac{50}{2} = 25 \ \Omega.$$

Fator de potência da associação RC

$$\cos\phi = \frac{P_{méd}}{V_{qm}\, I_{qm}} = \frac{60}{(50)(2)} = 0,6.$$

Questão 2

(I) Um laser cirúrgico opera em pulsos de $2,0 \times 10^{-2}$ s, com comprimento de onda de 663 nm. A potência média de cada pulso é $0,6$ W.

(a) (0,5 ponto) Qual é a energia E_{pulso} de cada pulso emitido pelo laser?

(b) (0,5 ponto) Qual é a energia $E_{\text{fóton}}$ de cada fóton emitido pelo laser? Qual é o número N de fótons emitidos em cada pulso? <u>Dado</u>: $h = 6,63 \times 10^{-34}$ J·s.

(II) Em um espalhamento Compton, um fóton é espalhado por um elétron inicialmente em repouso.

(a) (0,5 ponto) Qual é o ângulo que resulta no maior deslocamento do comprimento de onda do fóton?

(b) (1,0 ponto) Na situação do item (a), determine qual deve ser a energia do fóton incidente para que metade desta energia seja transferida ao elétron. Dê sua resposta apenas em termos da massa de repouso do elétron m_0 e da velocidade da luz c.

Solução da questão 2

(I) Laser

(a) A energia de cada pulso do laser é

$$E_{\text{pulso}} = P\Delta t = 0,6 \times 2,0 \times 10^{-2} = 1,2 \times 10^{-2}\text{J}$$

(b) A energia de um fóton é

$$E_{\text{fóton}} = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = \frac{(6,63 \times 10^{-34})(3,0 \times 10^{8})}{663 \times 10^{-9}} = 3,0 \times 10^{-19}\text{J}$$

Sendo N o número de fótons, teremos $E_{\text{pulso}} = NE_{\text{fóton}}$. Logo,

$$N = \frac{E_{\text{pulso}}}{E_{\text{fóton}}} = \frac{1,2 \times 10^{-2}}{3,0 \times 10^{-19}} = 4,0 \times 10^{16}.$$

(II) Espalhamento Compton

(a) A fórmula do deslocamento do comprimento de onda do fóton é

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos\theta)$$

O deslocamento máximo é obtido com $\boxed{\theta = \pi}$.

(b) Denotando E_γ e E'_γ respectivamente as energias do fóton incidente e do fóton espalhado, temos

$$\left.\begin{array}{l} \theta = \pi \Longrightarrow \lambda' - \lambda = 2\lambda_C \\ \dfrac{E'_\gamma}{E_\gamma} = \dfrac{hc/\lambda'}{hc/\lambda} = \dfrac{\lambda}{\lambda'} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda = 2\lambda_C \Longrightarrow \boxed{E_\gamma = \frac{hc}{2\lambda_C} = \frac{1}{2}m_0c^2}$$

Questão 3

Luz com comprimento de onda 200 nm incide sobre uma superfície de alumínio. No alumínio são necessários no mínimo 4,2 eV para remover um elétron.

(a) (1,0 ponto) Qual é a energia cinética máxima (em eV) dos fotoelétrons emitidos? Dado: $h = 4,1 \times 10^{-15}$ eV $\cdot$ s.

(b) (0,5 ponto) Qual é o potencial de corte V_0 a partir do qual não mais se detecta uma corrente de fotoelétrons?

(c) (0,5 ponto) Qual é o comprimento de onda de corte λ_c do limiar fotoelétrico do alumínio?

(d) (0,5 ponto) Se a intensidade I da luz incidente for duplicada, o que ocorre com a energia cinética máxima dos fotoelétrons emitidos? Justifique.

Solução da questão 3

(a) A função de trabalho do alumínio $\phi = 4,2$ eV. A energia cinética máxima dos elétrons emitidos é

$$E_{cin} = \frac{hc}{\lambda} - \phi = \frac{(4,1 \times 10^{-15})(3 \times 10^8)}{200 \times 10^{-9}} - 4,2 = 6,2 - 4,2 = 2,0 \text{ eV} .$$

(b) O potencial de frenagem é igual à ddp capaz de parar os elétrons emitidos. Conservação de energia aplicada aos elétrons fornece

$$E_{cin} - eV_i = -eV_f \Longrightarrow E_{cin} = eV_i - eV_f \equiv eV_0 \Longrightarrow V_0 = E_{cin}/e = 2,0 \text{ V}$$

(c) O comprimento de onda limiar é aquele para o qual o elétron é arrancado do material com energia cinética zero. Portanto,

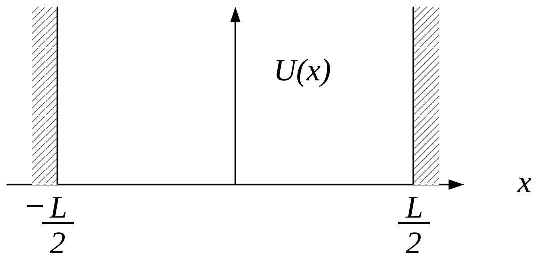
$$\frac{hc}{\lambda_c} - \phi = 0 \Longrightarrow \lambda_c = \frac{hc}{\phi} \Longrightarrow \lambda_c = \frac{(4,1 \times 10^{-15})(3 \times 10^8)}{4,2} = 2,9 \times 10^{-7} \text{ m}$$

(d) Se a intensidade da luz for duplicada a energia cinética máxima dos fotoelétrons não muda pois ela depende apenas da frequência da luz incidente e não de sua intensidade.

Questão 4

Uma partícula de massa m e energia E encontra-se numa caixa unidimensional que se extende de $x = -L/2$ a $x = L/2$, conforme representado na figura abaixo.

$$U(x) = \begin{cases} \infty \quad \text{para} \quad x \leq -L/2 \\ 0 \quad \text{para} \quad -L/2 < x < L/2 \\ \infty \quad \text{para} \quad x \geq L/2 \end{cases}$$



(a) (1,0 ponto) Considere funções do tipo $\psi_a(x) = A\cos(kx)$ e $\psi_b(x) = B\,\text{sen}(kx)$. Calcule k em função de E, m e $\hbar$ para que estas funções sejam soluções da equação de Schrödinger.

(b) (1,0 ponto) Usando as condições de contorno, obtenha os níveis de energia permitidos para os dois tipos de funções de onda.

(c) (0,5 ponto) Para o nível de menor energia encontrado em (b), para que valor de x a densidade de probabilidade de encontrar a partícula máxima?

$\boxed{\textbf{Solução da questão 4}}$

(a) A equação de Schrödinger dentro do poço se escreve como

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi$$

Substituindo as expressões para $\psi_a(x)$ e $\psi_b(x)$ nesta equação obtemos

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2\psi_a}{dx^2} = -k^2 A\cos(kx) = -k^2\psi_a = -\dfrac{2mE}{\hbar^2}\psi_a \\[2em] \dfrac{d^2\psi_b}{dx^2} = -k^2 B\text{sen}(kx) = -k^2\psi_b = -\dfrac{2mE}{\hbar^2}\psi_b \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}}$$

(b) As funções de onda devem se anular fora do poço e por continuidade devem também se anular para $x = \pm L/2$.

$$\psi_a(L/2) = \psi_a(-L/2) = 0 \Longrightarrow A\cos(kL/2) = 0 \Longrightarrow kL = (2n+1)\pi\ , \quad n = 0, 1, 2, ...$$

$$\psi_b(L/2) = \psi_b(-L/2) = 0 \Longrightarrow A\text{sen}(kL/2) = 0 \Longrightarrow kL = 2n\pi\ , \quad n = 1, 2, 3, ...\ ,$$

ou seja kL é um múltiplo inteiro de π.

$$\left.\begin{array}{l} kL = n'\pi\ , \quad n' = 1, 2, 3, ... \\ E = \dfrac{k^2\hbar^2}{2m} \quad \text{(item (a))} \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{E = \frac{\hbar^2}{2mL^2}\, n'^2\ , \quad n' = 1, 2, 3, ...}$$

(c) O estado de energia mais baixa tem $n' = 1$, $E = \hbar^2/(2mL^2)$ e $k = \pi/L$. A função de onda deste estado é

$$\psi_{a1}(x) = A\,\cos\left(\frac{\pi}{L}\,x\right) \Longrightarrow \underline{\text{densidade de probabilidade}} \quad P(x) = |\psi_{a1}(x)|^2 = A^2\cos^2\left(\frac{\pi}{L}\,x\right)\ .$$

$P(x)$ tem um máximo em $\boxed{x = 0}$.

Formulário

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \quad X_L = \omega L, \quad X_C = \frac{1}{\omega C}, \quad \tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R}, \quad V_m = Z I_m,$$

$P_{méd} = \dfrac{1}{2} V_m I_m \cos\phi = V_{qm} I_{qm} \cos\phi$ onde $V_{qm} = \dfrac{V_m}{\sqrt{2}}$ e $I_{qm} = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}}$ são os valores eficazes (valores quadráticos médios), V_m e I_m são os valores de pico e ϕ é o ângulo de defasagem entre a corrente e a voltagem.

Efeito fotoelétrico: $E_f = hf = hc/\lambda$, $E_{cin}^{max} = hf - \phi$

Fótons: $E = hf = hc/\lambda$, $E = pc$.

Expressões relativísticas: $E = m_0\gamma c^2$, $\vec{p} = m_0\gamma\vec{v}$, $E_{cin} = m_0\gamma c^2 - m_0c^2$, onde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, $E = \sqrt{(pc)^2 + (m_0c^2)^2}$.

Efeito Compton: $\lambda' = \lambda + \lambda_{\mathrm{C}}(1 - \cos\theta)$, onde θ é o ângulo entre a direção do fóton espalhado e a direção do fóton incidente e $\lambda_{\mathrm{C}} = h/(m_0c)$ é o comprimento de onda de Compton do elétron.

Equação de Schrödinger independente do tempo: $-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x)$.