PS

Física IV - FAP2204

Escola Politécnica - 2009

GABARITO DA PS

15 de dezembro de 2009

Questão 1

Considere os campos elétrico $\vec{E} = (0, E_y, 0)$ e magnético $\vec{B} = (0, 0, B_z)$ onde

$$E_y(x,t) = \frac{A}{\sqrt{\mu_0\,\epsilon_0}}\, e^{a(x-c\,t)} \quad \text{e} \quad B_z(x,t) = Ae^{a(x-c\,t)}.$$

(a) (1,0 ponto) Determine o valor da constante c para que $\vec{E}$ e $\vec{B}$ satisfaçam a lei de Faraday e a lei de Ampère-Maxwell no vácuo

$$\begin{cases} \text{(I)} \quad \dfrac{\partial E_y}{\partial x} = -\dfrac{\partial B_z}{\partial t}, \\ \\ \text{(II)} \quad \dfrac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0\,\epsilon_0\,\dfrac{\partial E_y}{\partial t}. \end{cases}$$

(b) (0,5 ponto) É possível determinar a constante a usando lei de Gauss do magnetismo $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$?

(c) (1,0 ponto) Determine a relação que k e ω devem satisfazer para que $E(x,t) = E_0\cos(kx - \omega t)$ seja solução da equação de onda

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}.$$

Solução da questão 1

(a) As derivadas de E_y e B_z fornecem

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{Aa}{\sqrt{\mu_0\,\epsilon_0}}\,e^{a(x-c\,t)}\ , \qquad \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{Aac}{\sqrt{\mu_0\,\epsilon_0}}\,e^{a(x-c\,t)}\ ,$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = Aa\,e^{a(x-c\,t)}\ , \qquad \frac{\partial B_z}{\partial t} = -Aac\,e^{a(x-c\,t)}\ .$$

Substituindo nas equações de Maxwell (I) e (II) obtemos, respectivamente

$$\frac{Aa}{\sqrt{\mu_0\,\epsilon_0}}\,e^{a(x-c\,t)} = Aac\,e^{a(x-c\,t)} \quad \text{e} \quad Aa\,e^{a(x-c\,t)} = \mu_0\,\epsilon_0\frac{Aac}{\sqrt{\mu_0\,\epsilon_0}}\,e^{a(x-c\,t)}\ .$$

As duas equações são satisfeitas se

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\,\epsilon_0}}}$$

(b) Não, porque a equação $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ é identicamente satisfeita para qualquer valor de a.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0,$$

uma vez que $B_z(x,t)$ não depende de z.

(c) As derivadas de E são

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -E_0 k \operatorname{sen}(kx-\omega t)\ , \quad \frac{\partial E}{\partial t} = E_0\omega \operatorname{sen}(kx-\omega t)\ ,$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -E_0 k^2\cos(kx-\omega t)\ , \quad \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -E_0\omega^2\cos(kx-\omega t)\ .$$

Substituindo as derivadas segundas na equação de ondas obtemos

$$-E_0k^2\cos(kx-\omega t) = -\frac{1}{c^2}E_0\omega^2\cos(kx-\omega t) \Longrightarrow k^2 = \frac{1}{c^2}\omega^2 \Longrightarrow \boxed{\omega = kc}$$

Questão 2

Considere o íon He^+ constituído de um elétron de carga $-e$ e massa m em órbita *circular* de raio r em torno de um núcleo de carga $+2e$.

(a) (1,0 ponto) Escreva a expressão clássica para a energia deste íon em função de e, r e da permissividade do vácuo ϵ_0.

(b) (1,0 ponto) Usando a regra de Bohr para a quantização do momento angular, $L = n\hbar$, determine os valores possíveis do raio e da energia.

(c) (0,5 ponto) Calcule a frequência de um fóton emitido na transição de um estado com número quântico n para o estado fundamental com $n = 1$.

Solução da questão 2

(a) Usando a expressão para a energia total e a segunda lei de Newton obtemos

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \\ F &= \frac{mv^2}{r} = \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Longrightarrow mv^2 = \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{E = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}}$$

(b) A condição de quantização de Bohr e a velocidade obtida no item (a) fornecem

$$\left.\begin{aligned} &L = mvr = n\hbar \\ &mv^2 = \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \Longrightarrow mv = \sqrt{\frac{2e^2 m}{4\pi\epsilon_0 r}} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{r = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{2e^2 m}n^2}$$

Substituindo na expressão da energia no item (a) obtemos

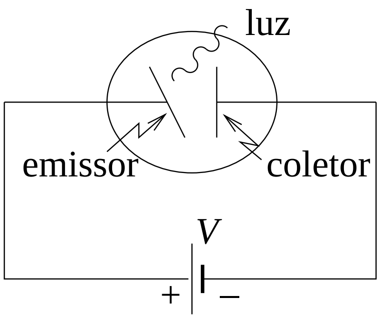
$$\boxed{E_n = -2m\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar}\right)^2 \frac{1}{n^2}}$$

(c) A frequência do fóton emitido na transição é

$$\boxed{f = \frac{E_n - E_1}{h} = \frac{2m}{h}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar}\right)^2\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}$$

Questão 3

(I) (1,0 ponto) Uma célula fotelétrica é ligada a um dispositivo que fornece uma ddp variável V, como mostra a figura. Ilumina-se o emissor com luz monocromática de comprimento de onda λ e uma corrente passa pelo circuito. Aumenta-se V lentamente até que para um valor V_0 a corrente cessa completamente



Determine a função de trabalho do material do emissor. Dê sua resposta em função de c, h, λ, V_0 e da carga e do elétron.

(II) Um fóton com comprimento de onda λ que se move no sentido positivo do eixo x é espalhado elasticamente por um elétron em repouso. Após a colisão o fóton se desloca no sentido negativo do eixo x (colisão frontal).

(a) (1,0 ponto) Escreva as equações de conservação de energia e de momento linear para o processo.

(b) (0,5 ponto) Sabendo-se que a velocidade do elétron após a colisão é igual a $3\,c/5$, determine o comprimento de onda λ' do fóton após a colisão. Dê sua resposta apenas em termos do comprimento de onda de Compton $\lambda_C = h/(m_0 c)$, onde m_0 é a massa de repouso do elétron.

Solução da questão 3

(I) Os elétrons são freiados por uma ddp igual a V_0. Portanto, a energia cinética máxima desses elétrons é $E_{cin}^{max} = eV_0$. Esta energia é igual à energia do fóton menos a energia de ligação do elétron (função de trabalho).

$$E_{cin}^{max} = eV_0 = h\frac{c}{\lambda} - \phi \Longrightarrow \phi = h\frac{c}{\lambda} - eV_0$$

(II) Por conservação de momento, o espalhamento é unidimensional e se dá ao longo do eixo x.

(a) As equações de conservação são

<u>conservação de momento:</u> $$\frac{h}{\lambda} = -\frac{h}{\lambda'} + mv \quad \text{(A)}$$

<u>conservação de energia:</u> $$\frac{hc}{\lambda} + m_0c^2 = \frac{hc}{\lambda'} + mc^2 \Longrightarrow \frac{h}{\lambda} + m_0c = \frac{h}{\lambda'} + mc \quad \text{(B)}$$

(b) Para $v = 3c/5$, $\gamma = 5/4$ e as equações (A) e (B) ficam

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} = \frac{mv}{h} = \frac{m_0\gamma v}{h} = \frac{3}{4}\frac{m_0c}{h} = \frac{3}{4\lambda_C} \quad \text{(C)}$$

$$\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} = \frac{(m-m_0)c}{h} = \frac{(\gamma-1)m_0c}{h} = \frac{1}{4\lambda_C} \quad \text{(D)}$$

Fazendo (C) - (D) obtemos λ'

$$\boxed{\lambda' = 4\lambda_C}\,.$$

Questão 4

A função de onda independente do tempo do oscilador harmônico quântico associada ao seu primeiro estado excitado é dada por

$$\psi_1(x) = Axe^{-ax^2}, \quad \text{onde} \quad a = \frac{m\omega}{2\hbar},$$

onde m é a massa da partícula que executa o movimento harmônico e $\hbar = h/2\pi$.

(a) (1,0 ponto) Determine a constante de normalização A.

(b) (1,0 ponto) Escreva a densidade de probabilidade $P(x)$ e determine a coordenada x de seus máximos e mínimos.

(c) (0,5) Esboce o gráfico de $P(x)$.

Dado: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-px^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2p^{3/2}}$

Formulário

Efeito fotoelétrico: $E_f = hf = hc/\lambda, \quad E_{cin}^{max} = hf - \phi$

Fótons: $E = hf = hc/\lambda, \quad E = pc.$

Expressões relativísticas: $E = m_0\gamma c^2, \quad \vec{p} = m_0\gamma\vec{v}, \quad E_{cin} = m_0\gamma c^2 - m_0c^2$, onde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, $E = \sqrt{(pc)^2 + (m_0c^2)^2}$.

Teoria de de Broglie: $\lambda = h/p, \quad f = E/h.$

Efeito Compton: $\lambda' = \lambda + \lambda_C(1 - \cos\theta)$, onde θ é o ângulo entre a direção do fóton espalhado e a direção do fóton incidente e $\lambda_C = h/(m_0c)$ é o comprimento de onda de Compton do elétron.

Princípio de Incerteza: $\Delta p_x\, \Delta x \geq \hbar, \quad \Delta E\, \Delta t \geq \hbar, \quad \hbar = h/(2\pi).$

Equação de Schrödinger independente do tempo: $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x).$

Solução da questão 4

(a) Impondo a normalização de ψ_1 obtemos

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_1|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 x^2 e^{-2ax^2} = A^2 \frac{\sqrt{\pi}}{2(2a)^{3/2}} \Longrightarrow A = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{1/4} \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{3/4}$$

(b) A densidade de probabilidade é

$$P(x) = |\psi_1|^2 = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{3/2} x^2 e^{-2ax^2}, \quad \text{onde} \quad a = \frac{m\omega}{2\hbar},$$

Os extremos de $P(x)$ são as raízes da equação $dP(x)/dx = 0$.

$$\frac{dP(x)}{dx} = A\left(2x - 4ax^3\right) e^{-2ax^2} = 0 \Longrightarrow x = 0 \quad \text{e} \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2a}} = \pm\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$

Note que $P(x) \geq 0$, $P(0) = 0$ e $P(x) \to 0$ quando $x \to \pm\infty$. Assim, $x = 0$ é um mínimo e $x = \pm 1/\sqrt{2a}$ são dois máximos.

(c) Esboço do gráfico de $P(x)$.