P1

Física IV - 4320402

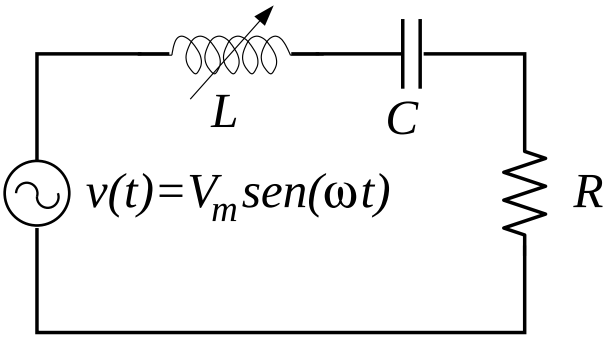
Escola Politécnica - 2010

GABARITO DA P1

31 de agosto de 2010

Questão 1

Considere o circuito RLC série mostrado na figura abaixo



O gerador de corrente alternada fornece uma tensão $v(t) = V_m \text{sen}(\omega t)$. A indutância L é variável e é ajustada de tal forma que a defasagem entre a voltagem do gerador e corrente no circuito é zero. Os valores de V_m, ω, C e R são conhecidos.

(a) (0,5 ponto) Qual é o valor de L? Justifique.

(b) (1,0 ponto) Construa o diagrama de fasores das voltagens no gerador, no indutor, no capacitor e no resitor, e da corrente no circuito. Qual a relação entre as voltagens máximas no resistor e no gerador? Justifique sua resposta.

(c) (0.5 ponto) Calcule a potência média dissipada no resistor.

(d) (0.5 ponto) Se substituirmos a resistência R por uma lâmpada de resistência $r < R$, para qual valor de L a lâmpada brilha com máxima intensidade?

Solução da questão 1

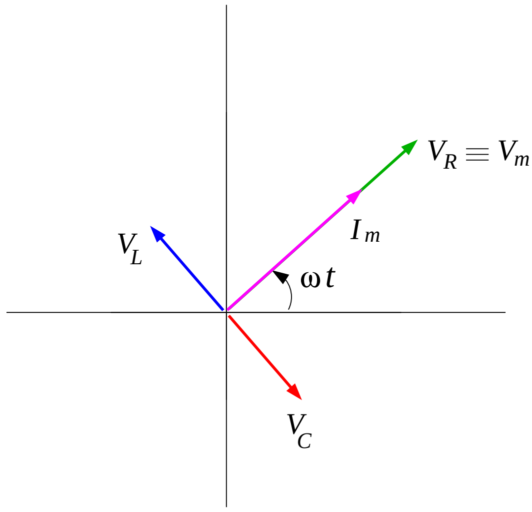
(a) O ângulo de defasagem entre a corrente e a voltagem é dado por

$$\phi = \arctan\left(\frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}\right) .$$

Este ângulo é nulo quando

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \Longrightarrow \boxed{L = \frac{1}{\omega^2 C} \quad \text{(ressonância)}} .$$

(b) Diagrama de fasores



O fasor V_m é a soma vetorial dos fasores das voltagens no indutor, no capacitor e no resistor. Como $V_L = \omega L = 1/(\omega C) = V_C$ a soma vetorial dos fasores das voltagens no indutor e no capacitor é zero e portanto o fasor V_m é igual ao fasor $V_R \Rightarrow \boxed{V_m = V_C}$. Isto também pode ser demonstrado lembrando que $V_m = ZI_m = RI_m = V_R$ uma vez $Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - 1/(C\omega))^2} = R$.

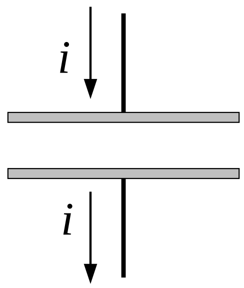
(c) A potência média no resistor é dada por

$$P_{méd} = R < I^2 >= RI_m^2 < \text{sen}^2(\omega t) >= \frac{1}{2} RI_m^2 \Longrightarrow \boxed{P_{méd} = \frac{V_m^2}{2R}} .$$

(d) O brilho da lâmpada vai ser máximo quando a potência média for máxima. Isto ocorre na ressonância e o valor de L para haver ressonância independe de R (veja o item (a)). Portanto, $\boxed{L = 1/(\omega^2 C)}$.

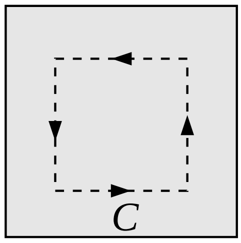
Questão 2

Um capacitor de placas quadradas e paralelas de área A está sendo carregado através de uma corrente i, conforme a figura 1. Despreze o efeito do campo elétrico inhomogêneo próximo das bordas.



Vista lateral

Fig. 1



Vista de cima

Fig. 2

(a) (0,5 ponto) Calcule dE/dt na região entre as placas em função de i, A e ϵ_0. (Lembre que o campo entre as placas de um capacitor plano é $E = \sigma/\epsilon_0$, onde σ é a densidade superficial de carga na placa do capacitor.)

(b) (1,0 ponto) Calcule a corrente de deslocamento através da região entre as placas do capacitor.

(c) (1.0 ponto) Qual é o valor da integral $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$ em torno do quadrado pontilhado (percurso C da figura 2) de área $A' < A$?

$\boxed{\textbf{Solução da questão 2}}$

(a) Em um capacitor de placas planas $E = Q/(A\epsilon_0)$, onde Q é a carga na placa do capacitor. Assim,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{A\epsilon_0}\frac{dQ}{dt} = \frac{i}{A\epsilon_0} \ .$$

(b) A corrente de deslocamento entre as placas é igual a

$$i_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt} = \epsilon_0 \frac{d(EA)}{dt} = \epsilon_0 A \frac{dE}{dt} = i \ ,$$

onde usamos que o campo E é uniforme entre as placas do capacitor, portanto $\Phi_e = EA$ e usamos os resultados do item (a).

(c) A lei de Ampère-Maxwell entre as placas do capacitor fornece

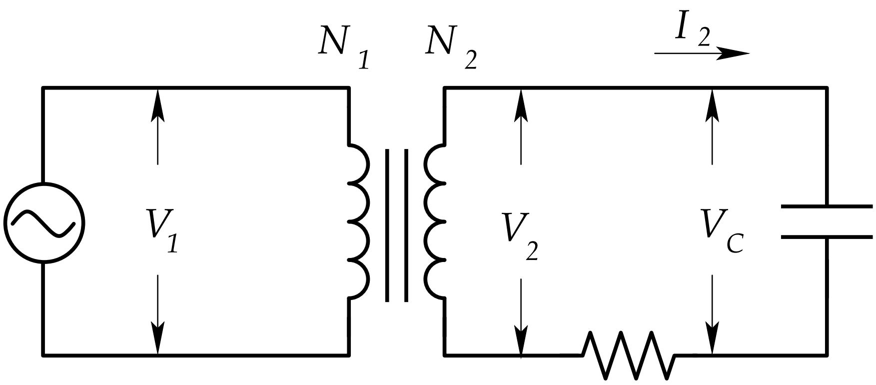
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt} \ ,$$

onde Φ_e é o fluxo do campo elétrico através de uma superfície delimitada por C, por exemplo a área plana delimitada pelo quadrado pontilhado. Assim,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d(EA')}{dt} = \mu_0 \epsilon_0 A' \frac{dE}{dt} = \frac{\mu_0 A' i}{A} \ .$$

Questão 3

O enrolamento primário de um transformador ideal é alimentado por um gerador de corrente alternada de tensão eficaz (também chamada quadrática média) $V_1 = 200$ V e freqüência angular $\omega = 500$ rd/s. O secundário é ligado a uma associação em série de um capacitor de 5μ F e um resistor de 300 Ω. A corrente eficaz no secundário é $I_2 = 0,1$ A.



(a) (1,0 ponto) Determine a impedância Z_2 (somente o módulo) da associação em série do capacitor e do resitor no secundário, e a tensão eficaz V_2 no secundário.

(b) (1,0 ponto) Determine a razão N_1/N_2 entre os números de espiras no primário e secundário, e a corrente eficaz no primário.

(c) (0,5 pontos) Determine a tensão eficaz V_C entre os terminais do capacitor.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 3}}$

(a) Reatância do capacitor

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(500)(5 \times 10^{-6})} = 400\ \Omega.$$

Impedância (módulo) da associação RC

$$Z_2 = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{300^2 + 400^2} = 500\ \Omega.$$

Tensão eficaz no secundário

$$V_2 = Z_2 I_2 = (500)(0,1) = 50\ \text{V}.$$

(b) Razão entre o número de espiras

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{200}{50} = 4.$$

Num transformador ideal toda a potência gerada no primário é transferida para o secundário. Assim, $V_1 I_1 = V_2 I_2$ e

$$I_1 = \frac{V_2 I_2}{V_1} = \frac{(50)(0,1)}{200} = 0,025\ \text{A}\ .$$

(c) Tensão eficaz no capacitor

$$V_C = X_C I_2 = (400)(0,1) = 40\ \text{V}.$$

Questão 4

Uma onda eletromagnética plana senoidal no vácuo tem as seguintes características: (1) A freqüência é 100 MHz ($= 10^8 \mathrm{s}^{-1}$), (2) propaga-se no sentido negativo do eixo x, (3) a intensidade é 240 W/m^2 e (4) o campo elétrico está na direção do eixo y e atinge o valor máximo para $x = 0$ e $t = 0$. São dados: a velocidade da luz no vácuo $c = 3 \times 10^8$ m/s e a permeabilidade magnética do vácuo $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m.

(a) (0,5 ponto) Determine o comprimento de onda.

(b) (0,5 ponto) Determine o módulo da força que a onda exerce sobre uma superfície quadrada perfeitamente refletora de 1 km de lado e perpendicular ao eixo x.

(c) (1,0 ponto) Escreva a expressão do campo elétrico.

(d) (0,5 ponto) Escreva a expressão do campo magnético.

Solução da questão 4

(a) Comprimento de onda

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{100 \times 10^6} = 3 \text{ m}.$$

(b) Pressão de radiação

$$P_{\text{rad}} = \frac{2I}{c} = \frac{2(240)}{3 \times 10^8} = 1,6 \times 10^{-6} \text{ Pa}.$$

Força

$$F = P_{\text{rad}} A = (1,6 \times 10^{-6})(10^3)^2 = 1,6 \text{ N}.$$

(c) O campo elétrico tem a forma

$$\vec{E} = \vec{\jmath}\, E_m \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T} + \delta \right),$$

onde $T = 1/f = 10^{-8}$ s, $\delta = 0$ e

$$E_m = \sqrt{2\mu_0 c I} = \left[2(4\pi \times 10^{-7})(3 \times 10^8)(240) \right]^{1/2} = 240\sqrt{\pi} \text{ V/m}.$$

Portanto,

$$\vec{E} = \vec{\jmath}\, 240\sqrt{\pi} \cos \left[2\pi \left(\frac{x}{3} + 10^8 t \right) \right] \quad \text{(V/m)}.$$

(d) O campo magnético é

$$\vec{B} = \frac{(-\vec{\imath}) \times \vec{E}}{c} = -\vec{k}\, 8\sqrt{\pi} \times 10^{-7} \cos \left[2\pi \left(\frac{x}{3} + 10^8 t \right) \right] \quad \text{(T)}.$$

Formulário

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \quad X_L = \omega L, \quad X_C = \frac{1}{\omega C}, \quad \tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R}, \quad V_m = Z I_m,$$

$$P_{med} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos\phi, \quad V_{qm} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}, \quad I_{qm} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad \frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2}\ .$$

No vácuo: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A},$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}, \quad E = cB.$$

$$I_D = \epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt} \quad \text{onde} \quad \Phi_e = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}.$$

$$\vec{E} = E_m \cos(kx - \omega t + \phi) \widehat{e}_y, \quad \vec{B} = B_m \cos(kx - \omega t + \phi) \widehat{e}_z, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}. \quad k\,c = \omega.$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}, \quad S = uc, \quad u = u_e + u_m = \frac{\epsilon_0\, E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

$$I = < S > = \frac{E_m\, B_m}{2\mu_0}, \quad \text{média temporal: } < cos^2(kx - \omega t + \phi) > = 1/2.$$

$$P_{rad} = \frac{2I}{c} \text{ e } P_{rad} = \frac{I}{c}\ .$$