Física IV - 4320402

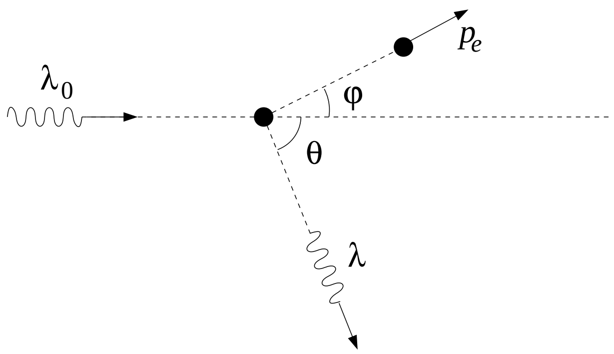
Escola Politécnica - 2010

GABARITO DA P3

30 de novembro de 2010

Questão 1

Em uma colisão relativística, um fóton com comprimento de onda λ_0 colide com um elétron de massa m_0 em repouso. Após a colisão, indicamos por λ e θ o comprimento de onda e ângulo de espalhamento do fóton e por p_e e φ o módulo do momento e o ângulo de espalhamento do elétron, conforme a figura.



(a) (1,0 ponto) Escreva as leis de conservação de energia e momento para esta colisão em função de λ_0, λ, p_e, φ, θ, m_0, h e da velocidade da luz c.

(b) (0,5 ponto) Para $\theta = 90°$, calcule o momento do fóton após a colisão em função de λ_0, m_0, h e da velocidade da luz c.

(c) (1,0 ponto) Nas condições do item (b), determine o ângulo de espalhamento do elétron em função de λ_0, m_0, h e da velocidade da luz c.

Solução da questão 1

(a) As equações de conservação são dadas por:

$$\underline{\text{Energia:}} \quad \frac{hc}{\lambda_0} + m_0c^2 = \frac{hc}{\lambda} + \sqrt{p_e^2\,c^2 + m_0^2\,c^4}\ .$$

$$\underline{\text{Momento:}} \quad \begin{cases} \dfrac{h}{\lambda_0} = \dfrac{h}{\lambda}\cos\theta + p_e\cos\varphi\ , \\[2ex] 0 = -\dfrac{h}{\lambda}\,\text{sen}\,\theta + p_e\,\text{sen}\,\varphi\ . \end{cases}$$

(b) A fórmula de espalhamento de Compton fornece

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_C(1-\cos\theta) \quad \text{com} \quad \lambda_C = \frac{h}{m_0c}\ .$$

Para $\theta = 90°$, $\cos\theta = 0$ e

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_C = \lambda_0 + \frac{h}{m_0c} \quad \therefore \quad \boxed{p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda_0 + h/m_0c}}\ .$$

(c) Para $\theta = 90°$, as equações de conservação de momento são

$$\text{(A)} \quad \frac{h}{\lambda_0} = p_e\cos\varphi\ ,$$

$$\text{(B)} \quad \frac{h}{\lambda} = p_e\,\text{sen}\,\varphi\ .$$

Dividindo (B) por (A) obtemos

$$\tan\varphi = \frac{\lambda_0}{\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\tan\varphi = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + h/m_0c}}\ .$$

Questão 2

Na experiência de Rutherford, a estrutura interna do átomo foi estudada por meio do espalhamento de partículas α. De modo análogo, é possível estudar a estrutura interna do núcleo por meio do espalhamento de elétrons. Supondo que o núcleo tenha dimensão da ordem $D = 1 \times 10^{-15}$ m, o objetivo é estimar o momento p mínimo que o elétron deve ter para esta experiência.

(a) (1,0 ponto) Supondo que a posição do elétron deve ser determinada com incerteza menor do que D, utilize o princípio de incerteza de Heisenberg para obter uma estimativa do momento linear p do elétron.

(b) (0,5 ponto) Segundo a física newtoniana, qual seria a velocidade desse elétron? Como essa velocidade se compara com a velocidade da luz?

(c) (1,0 ponto) Nessas condições, a energia de repouso do elétron pode ser desprezada, e a energia do elétron é dada pela mesma expressão válida para o fóton. Qual é a energia desse elétron em joules?

Dados: $\hbar \approx 1 \times 10^{-34}$ J.s, massa do elétron $m_0 \approx 9 \times 10^{-31}$ kg e $c \approx 3 \times 10^8$ m/s.
Observação: trabalhe com 1 algarismo significativo. Assim, $3,5 \approx 4$; $0,732 \approx 7 \times 10^{-1}$; $342 \approx 3 \times 10^2$; etc. Efetue as contas até o final, não deixe as contas apenas indicadas.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 2}}$

(a) O princípio de incerteza de Heisenberg fornece

$$\Delta x \Delta p \approx \frac{\hbar}{2} \Longrightarrow p \approx \Delta p \approx \frac{\hbar}{2\Delta x} \approx \frac{1 \times 10^{-34}}{2 \times 10^{-15}} = 5 \times 10^{-20} \text{ kg·m/s}.$$

(b) O momento clássico do elétron é

$$p = m_0 v \Longrightarrow v = \frac{p}{m_0} = \frac{5 \times 10^{-20} \text{ kg m s}^{-1}}{9 \times 10^{-31} \text{ kg}} = 6 \times 10^{10} \text{ m/s} \; >> \; c.$$

(c) A energia de elétron é

$$E \approx pc = (5 \times 10^{-20} \text{ kg m/s})(3 \times 10^{8} \text{ m/s}) = 2 \times 10^{-11} \text{ J}.$$

Questão 3

Um estado quântico de uma partícula com energia E é descrito pela função de onda normalizada

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) \exp(-iEt/\hbar).$$

(a) (1,0 ponto) Qual é o significado de $|\Psi(x, y, z, t)|^2$? O estado considerado é estacionário? Justifique.

(b) (0,5 ponto) Num átomo de hidrogênio, sejam

$$\Psi_{1s} = \psi_{1s} \exp(-iE_1 t/\hbar) \quad \text{e} \quad \Psi_{2p} = \psi_{2p} \exp(-iE_2 t/\hbar)$$

as funções de onda do orbital $1s$ e um dos orbitais $2p$. De acordo com os postulados de Bohr, qual é a frequência f do fóton emitido quando o elétron efetua uma transição do orbital $2p$ para o orbital $1s$?

(c) (1,0 ponto) A função de onda do estado fundamental do hidrogênio é dada por

$$\psi_{1s}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0},$$

onde r é a distância ao núcleo e a_0 é o raio de Bohr. Calcule a probabilidade do elétron ser encontrado a uma distância do núcleo maior do que a_0.

Dado: $\int x^2 e^{-x} dx = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x}$.

Solução da questão 3

(a) A quantidade $|\Psi(x,y,z,t)|^2$ fornece a probabilidade por unidade de volume de encontrar o elétron nas vizinhanças do ponto de coordenadas (x,y,z) no instante t. Para a função de onda do problema esta probabilidade independe do tempo:

$$\begin{aligned} |\Psi(x,y,z,t)|^2 &= \Psi(x,y,z,t)\Psi^\star(x,y,z,t) \\ &= \psi(x,y,z)\exp\left(-iEt/\hbar\right)\psi^\star(x,y,z)\exp\left(+iEt/\hbar\right) = |\psi(x,y,z)|^2. \end{aligned}$$

Assim, o estado representado por esta função de onda é um estado estacionário.

(b) De acordo com os postulados de Bohr, a freqüência do fóton emitido é

$$f = \frac{\Delta E}{h} = \frac{E_2 - E_1}{h}.$$

(c) A probabilidade de encontrar a partícula além do raio de Bohr é

$$\begin{aligned} P(r > a_0) &= \int_{a_0}^{\infty} |\psi_{1s}(r)|^2 (4\pi r^2 dr) = \frac{4}{a_0^3}\int_{a_0}^{\infty} r^2 e^{-2r/a_0} dr = \frac{1}{2}\int_2^{\infty} x^2 e^{-x} dx \\ &= -\frac{1}{2}(x^2+2x+2)e^{-x}\Big|_2^{\infty} = 5e^{-2} \approx 0,677. \end{aligned}$$

Questão 4

Considere o movimento unidimensional de uma partícula de massa m sob um potencial $U(x)$ que é nulo na região $0 < x < L$ e infinito para $x \leq 0$ ou $x \geq L$.

(a) (0,5 ponto) Escreva a função de onda $\psi(x)$ nas regiões $x \leq 0$ e $x \geq L$. Justifique.

(b) (0,5 ponto) Escreva a equação de Schrödinger para a região $0 < x < L$.

(c) (0,5 ponto) Qual é a relação que deve haver entre k e a energia E para que a função de onda $\psi(x) = A\text{sen}(kx) + B\cos(kx)$ (k real; A e B constantes) satisfaça a equação de Schrödinger na região $0 < x < L$?

(d) (1,0 ponto) Utilizando as condições de contorno, determine os possíveis valores de k e os níveis de energia.

Solução da questão 4

(a) Fora da região $0 < x < L$ o potencial é infinito. Então a probabilidade $|\psi(x)|^2 dx$ é nula. Logo, $\boxed{\psi(x) = 0}$.

(b) Na região $0 < x < L$ temos a equação de Schrödinger unidimensional com potencial nulo, dada por

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x)}.$$

(c) Usando

$$\frac{d^2\text{sen}(kx)}{dx^2} = -k^2\text{sen}(kx) \quad \text{e} \quad \frac{d^2\cos(kx)}{dx^2} = -k^2\cos(kx)$$

teremos

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}(A\text{sen}(kx) + B\cos(kx)) = -k^2(A\text{sen}(kx) + B\cos(kx)) = -k^2\psi(x).$$

Usando este resultado na equação de Schrödinger obtemos,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\psi(x) = E\psi(x) \Longrightarrow \boxed{k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}}.$$

(d) Para que a condição de contorno em $\psi(0) = 0$ seja satisfeita, devemos ter $B = 0$. Em $x = L$, teremos $A\text{sen}(kL) = 0$. Logo $kL = n\pi$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$. Portanto,

$$k = \frac{n\pi}{L}.$$

Usando a relação entre k e E, teremos

$$\boxed{E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}; \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots}$$

Formulário

$E = hf = hc/\lambda, \quad E = pc,$

$E = m_0\gamma c^2, \quad \vec{p} = m_0\gamma\vec{v}, \quad E_{cin} = m_0\gamma c^2 - m_0 c^2$, onde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$,

$E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2 c^4}, \quad \lambda' = \lambda + \lambda_C(1 - \cos\theta)$, onde $\lambda_C = h/(m_0 c)$.

$\Delta p\,\Delta x \geq \hbar/2, \quad \Delta E\,\Delta t \geq \hbar/2, \quad \hbar = h/(2\pi).$

$-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x).$