PR

# Física IV - 4320402

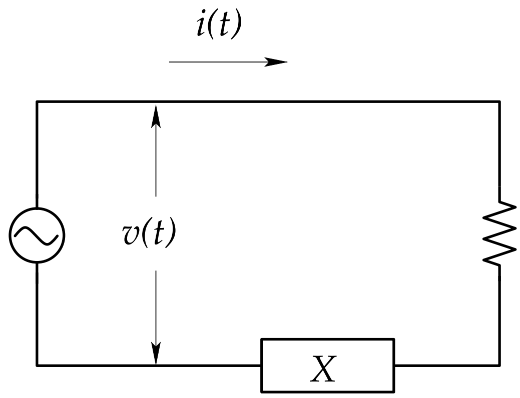
Escola Politécnica - 2010

Gabarito da Prova de Recuperação

**8 de fevereiro de 2011**

## Questão 1

No circuito abaixo um gerador de corrente alternada está em série com um resistor e um elemento desconhecido X que pode ser um resistor, um capacitor ou um indutor.




As tensões e correntes instantâneas no circuito são

$$v(t) = 100\cos 100t \quad \text{(V)} \quad \text{e} \quad i(t) = 2\cos(100t - \pi/3) \quad \text{(A)},$$

sendo $t$ em segundos.

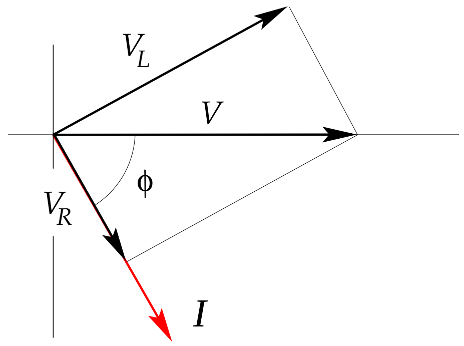
(a) (1,0 ponto) Construa o diagrama de fasores para a corrente e as tensões. Identifique o elemento X (resistor, capacitor ou indutor) justificando a sua resposta.

(b) (1,0 ponto) Determine a resistência do resistor e a propriedade característica do elemento X (resistência, capacitância ou indutância).

(c) (0,5 pontos) Determine o fator de potência e a potência média dissipada no circuito.

**Solução da questão 1**

(a) Diagrama de fasores




$V = 100$ V,

$I = 2$ A,

$\phi = \dfrac{\pi}{3}$ rd.

A corrente está atrasada em relação à tensão. Logo o elemento X é um indutor.

(b) Amplitude da tensão no resistor

$$V_R = V\cos\phi = 100\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 50 \text{ V}.$$

Resistência

$$R = \frac{V_R}{I} = \frac{50}{2} = 25\ \Omega.$$

Amplitude da tensão no indutor

$$V_L = V\sin\phi = 100\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 50\sqrt{3} \text{ V}.$$

Reatância indutiva

$$X_L = \frac{V_L}{I} = \frac{50\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}\ \Omega.$$

Indutância

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{25\sqrt{3}}{100} = 250\sqrt{3} \text{ mH}.$$

(c) Fator de potência

$$\cos\phi = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

Potência média dissipada

$$P = \frac{1}{2}VI\cos\phi = \left(\frac{1}{2}\right)(100)(2)\left(\frac{1}{2}\right) = 50 \text{ W}.$$

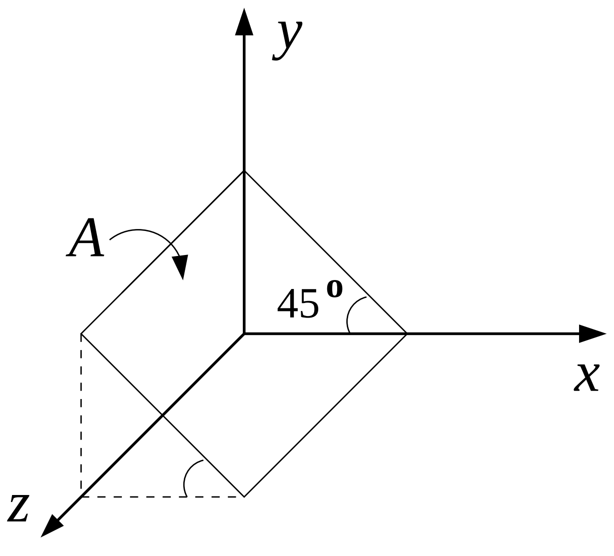
## Questão 2

Numa onda plana monocromática de comprimento de onda $\lambda$ que se propaga no vácuo na direção positiva do eixo $x$, o vetor campo elétrico oscila ao longo da direção $y$. A intensidade da onda vale $I$.

(a) (0,5 ponto) Determine a frequência da onda, o número de onda, a amplitude do campo elétrico e a amplitude do campo magnético. As respostas devem ser dadas apenas em termos de $\mu_0$, $c$, $I$ e $\lambda$.

(b) (1,0 ponto) Sabendo-se que na origem do sistema de coordenadas, no instante $t = 0$, o campo elétrico é maximo e aponta no sentido positivo do eixo $y$, escreva as expressões do vetor campo elétrico, do vetor campo magnético e do vetor de Poynting. As respostas devem ser dadas apenas em termos de $\mu_0$, $c$, $I$ e $\lambda$.

(c) (1,0 ponto) Considere a superfície de área $A$ mostrada na figura abaixo. Ela está inclinada de 45° em relação ao plano $xz$. Calcule a energia que atravessa esta superfície no intervalo de tempo $\Delta t$ (suponha que $\Delta t$ seja um múltiplo inteiro do período da onda).



$\boxed{\textbf{Solução da questão 2}}$

(a) O número de onda $k$ e a frequência $f$ são

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}\,, \quad f = \frac{c}{\lambda}\,.$$

A intensidade $I$ da onda é o valor médio do módulo do vetor de Poynting

$$I =< S >= \frac{E_m^2}{2c\mu_0} = \frac{cB_m^2}{2\mu_0} \Longrightarrow E_m = \sqrt{2c\mu_0 I} \quad \text{e} \quad B_m = \sqrt{\frac{2\mu_0 I}{c}}\,.$$

(b) Os vetores campo elétrico e magnético são dados respectivamente por

$$\vec{E} = E_m \cos(kx - \omega t)\vec{\jmath} = \sqrt{2c\mu_0 I}\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct)\right]\vec{\jmath}\,,$$

$$\vec{B} = B_m \cos(kx - \omega t)\vec{k} = \sqrt{\frac{2\mu_0 I}{c}}\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct)\right]\vec{k}\,,$$

onde usamos $\omega = 2\pi f$ e $\phi = 0$ (consistente com $\vec{E}(x = 0, t = 0) = E_m\,\vec{\jmath}\,$).

O vetor de Poynting associado à onda é

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} = 2I\cos^2\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct)\right]\vec{\imath}\,.$$

(c) Do item (b) podemos calcular o valor médio do vetor de Poynting.

$$< \vec{S} >= I\,\vec{\imath}\,.$$

A energia média por unidade de tempo através da superfície é

$$< P >= \int < \vec{S} > \cdot\, d\vec{A} =< \vec{S} > \cdot\, \widehat{n} A = IAn_x\,,$$

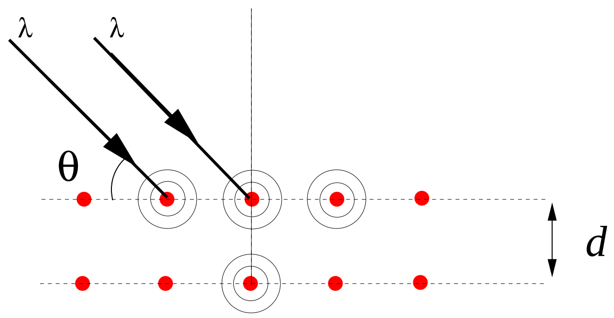
onde $\widehat{n} = \sqrt{2}(\vec{\imath} + \vec{\jmath})/2$ é a normal à superfície. Portanto, a energia $\Delta U$ através de $A$ em $\Delta t$ é

$$\Delta U =< P > \Delta t = IA\frac{\sqrt{2}}{2}\Delta t\,.$$

## Questão 3

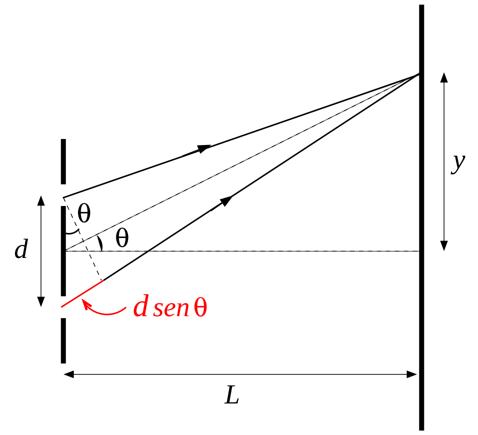
(I) (1,5 ponto) Numa experiência de Young, duas fendas separadas de $1,5$ mm, são iluminadas com luz de comprimento de onda igual a 600 nm. As franjas brilhantes de interferência são observadas em um anteparo a uma distância de 3 m do plano das fendas. Determine o espaçamento entre duas franjas consecutivas.

(II) (1,0 ponto) Deduza a condição de interferência construtiva para um raio X de comprimento de onda $\lambda$ incidindo num cristal formando um ângulo $\theta$ com os planos cristalinos espaçados de $d$, conforme mostra a figura.



**Solução da questão 3**

(I) Observando a figura abaixo vemos que os máximos de interferência (franjas) são obtidos quando $\quad d\mathrm{sen}\theta = m\lambda\,, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$



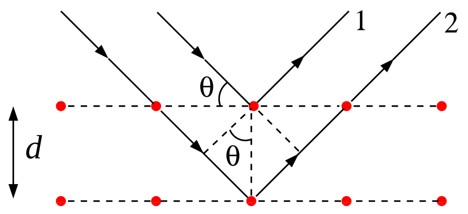

Como $L >> y$, $sen\theta \approx \tan\theta = y/L$ e podemos reescrever as condições de máximo como interferência (franjas) são obtidos quando

$$d\frac{y}{L} = m\lambda\,, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

O espaçamento $\Delta y$ entre franjas consecutivas é igual a

$$\Delta y = y_{m+1} - y_m = \frac{\lambda L}{d}(m + 1 - m) \Longrightarrow \boxed{\Delta y = \frac{\lambda L}{d} = \frac{(6 \times 10^{-7})3}{1,5 \times 10^{-3}} = 1,2 \times 10^{-3}\mathrm{m}}$$

(II) A diferença de percurso entre os raios 1 e 2 na figura abaixo é $2dsen\theta$.

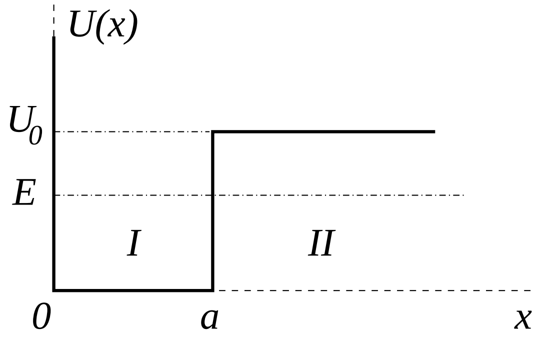



A condição para haver interferência construtiva é

$$\boxed{2dsen\theta = m\lambda\,, \quad m = 1, 2, 3, ... \quad \text{(Lei de Bragg)}}$$

## Questão 4

Uma partícula de massa $m$ que se move ao longo do eixo $x$ está submetida ao potencial $U(x)$ mostrado na figura.




$$U(x) = \begin{cases} \infty & \text{para} \quad x \leq 0; \\ 0 & \text{para} \quad 0 < x < a; \\ U_0 & \text{para} \quad x \geq a. \end{cases}$$

(a) (1,0 ponto) Escreva a equação de Schrödinger nas regiões $I$ ($0 < x < a$) e $II$ ($x \geq a$), indicadas na figura.

(b) (0,5 ponto) Sabendo-se que a função de onda na região $I$ tem a forma

$$\psi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx},$$

use a condição de continuidade da função de onda em $x = 0$ para encontrar uma relação entre $A$ e $B$.

(c) (1,0 ponto) Na região $II$ a função de onda é dada por

$$\psi_{II}(x) = Ce^{-Kx}.$$

Determine o valor de $K$ em função de $E$, $U_0$, $m$ e $\hbar$.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 4}}$

(a) A equação de Schrödinger se escreve como:

$$\text{Região } I: \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_I(x)}{dx^2} = E\psi_I(x);$$

$$\text{Região } II: \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_{II}(x)}{dx^2} + U_0\,\psi_{II}(x) = E\psi_{II}(x).$$

(b) Como o potencial é infinito para $x \leq 0$, a função de onda deve se anular nesta região. A continuidade em $x = 0$ impõe que $0 = \psi_I(0)$. Portanto,

$$A + B = 0 \Longrightarrow \boxed{B = -A}.$$

(c) A equação de Schrödinger na região $II$ pode ser reescrita como (veja o item (a))

$$\frac{d^2\psi_{II}(x)}{dx^2} = \frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}\psi_{II}(x).$$

Substituindo a solução $\psi_{II}(x) = Ce^{-Kx}$ nesta equação obtemos

$$K^2 Ce^{-Kx} = \frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}Ce^{-Kx} \Longrightarrow \boxed{K = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}}.$$

**Formulário**

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \quad X_L = \omega L, \quad X_C = \frac{1}{\omega C}, \quad \tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R}, \quad V_m = Z I_m,$$

$$P_{med} = \frac{1}{2}V_m I_m \cos\phi, \quad V_{qm} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}, \quad I_{qm} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad \frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2}.$$

$$\vec{E} = E_m\cos(kx - \omega t + \phi)\hat{e}_y, \quad \vec{B} = B_m\cos(kx - \omega t + \phi)\hat{e}_z, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}. \quad k\,c = \omega.$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}, \quad S = uc, \quad u = u_e + u_m = \frac{\epsilon_0\,E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

$$I = \langle S \rangle = \frac{E_m\,B_m}{2\mu_0}, \quad \text{média temporal: } \langle cos^2(kx - \omega t + \phi)\rangle = 1/2.$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x).$$