**PS**

# Física IV - 4320402

Escola Politécnica - 2010

GABARITO DA PS

**7 de dezembro de 2010**

## Questão 1

Um circuito consiste de um resistor de $5\,\Omega$, um capacitor de $1\mu$F e um indutor de $0,01\,$H. Os três elementos estão em série com uma fonte que gera uma força eletromotriz dada por $10\,\mathrm{sen}\,(\omega t)$ volts. O sistema está inicialmente em ressonância.

(a) (1,0 ponto) Qual é a potência média (em watts) gerada pela fonte?

(b) (1,5 ponto) Variamos a frequência da fonte de tal maneira que a diferença entre as reatâncias do capacitor e do indutor se torna igual a $5\,\Omega$. Qual é agora a potência média gerada pela fonte?

$\boxed{\textbf{Solução da questão 1}}$

(a) Na ressonância, a impedância do circuito é

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = R,$$

enquanto o ângulo de fase do circuito é tal que

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} = 0 \quad \therefore \quad \phi = 0.$$

A potência média é

$$P = \frac{1}{2} V I \cos\phi = \frac{1}{2}\frac{V^2}{Z}\cos\phi,$$

de modo que

$$P = \frac{1}{2}\frac{V^2}{R}\cos 0 = \frac{100}{2\times 5}\,\mathrm{W} \quad \therefore \quad P = 10\,\mathrm{W}.$$

(b) Com $\omega L - 1/\omega C = 5\,\Omega$, temos $Z = \sqrt{2\times 25}\,\Omega = 5\sqrt{2}\,\Omega$ e $\operatorname{tg}\phi = 1$, e portanto $\phi = 45\,^\circ$, de modo que

$$P = \frac{1}{2}\cdot\frac{100}{5\sqrt{2}}\cos 45\,^\circ\,\mathrm{W} = \frac{10}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{W} \quad \therefore \quad P = 5\,\mathrm{W}.$$

## Questão 2

O fluxo de energia luminosa emitida pelo Sol é de cerca de $1000\,\mathrm{W/m^2}$ para incidência normal sobre a superfície da Terra.

(a) (0,5 ponto) Calcule a potência total que incide perpendicularmente sobre um telhado de $10\,\mathrm{m} \times 10\,\mathrm{m}$.

(b) (1,0 ponto) Determine a pressão de radiação e a força sobre o telhado, supondo que toda a radiação indicidente seja absorvida.

(c) (1,0 ponto) Um satélite de $100\,\mathrm{kg}$ é impulsionado por uma vela solar totalmente refletora de $10\,\mathrm{m} \times 10\,\mathrm{m}$. Supondo que a radiação incide normalmente sobre a vela, determine o tempo necessário para que o satélite atinja a velocidade de $300\,\mathrm{m/s}$ partindo do repouso. Ignore os efeitos da atração gravitacional.

Dado: velocidade da luz $c = 3,0 \times 10^8$ m/s.

**Solução da questão 2**

(a) Se designamos por $I$ o fluxo de energia e por $A$ a área do telhado, a potência corresponderá a

$$P = IA = 1000\,\mathrm{W/m^2} \times 100\,\mathrm{m^2} \quad \therefore \quad P = 100\,\mathrm{kW}.$$

(b) Para absorção perfeita, a pressão de radiação é dada por $p_{rad} = I/c$, sendo $c$ a velocidade da luz no vácuo, de modo que

$$p_{rad} = \frac{1000\,\mathrm{W/m^2}}{3,0 \times 10^8\,\mathrm{m/s}} \quad \therefore \quad p_{rad} = 3,3 \times 10^{-6}\,\mathrm{N/m^2},$$

e a força é então

$$F = p_{rad}A = 3,3 \times 10^{-6}\,\mathrm{N/m^2} \times 100\,\mathrm{m^2} \quad \therefore \quad F = 3,3 \times 10^{-4}\,\mathrm{N}.$$

(c) A aceleração sofrida pelo satélite de massa $m$ é dada por

$$a = \frac{F'}{m},$$

onde $F' = 2F = 2IA/c$ e o fator 2 se deve ao fato da vela ser perfeitamente refletora. Partindo do repouso, sua velocidade após um tempo $t$ é

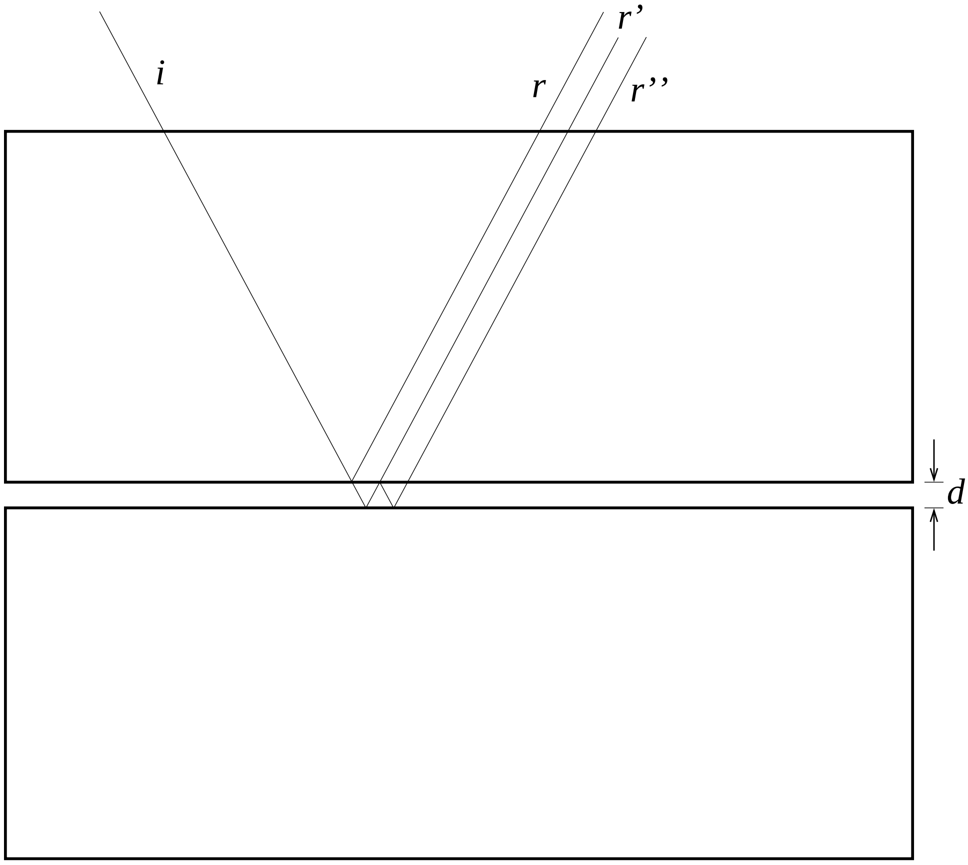
$$v = at = \frac{F't}{m},$$

de modo que o tempo necessário para atingir uma velocidade $v$ é

$$t = \frac{mv}{F'} = \frac{100\,\mathrm{kg} \times 300\,\mathrm{m/s}}{6,6 \times 10^{-4}\,\mathrm{N}} \quad \therefore \quad t = 4,5 \times 10^7\,\mathrm{s}.$$

Esse é um tempo de cerca de 1,5 ano!

## Questão 3




Luz branca incide perpendicularmente sobre uma camada de ar de espessura $d$ formada entre duas placas de vidro (com índice de refração $n_v = 1,33$), da maneira esquematizada na figura. Para distinguir os raios, a figura foi desenhada para uma incidência oblíqua, mas a resolução deve se limitar à incidência normal.

(a) (1,0 ponto) Para uma componente da luz branca de comprimento de onda $\lambda$ no vácuo, qual é a diferença de fase entre os raios $r$ e $r'$ em termos de $\lambda$ e $d$?

(b) (1,0 ponto) Qual o mínimo valor da espessura $d$ para que a componente azul ($\lambda = 400\,\text{nm}$) sofra interferência construtiva?

(c) (0,5 ponto) Para esse valor mínimo de $d$, qual a diferença de fase entre os raios $r'$ e $r''$?

$\boxed{\textbf{Solução da questão 3}}$

(a) A diferença de fase $\Delta\phi'$ está associada à maior distância que o raio $r'$ tem que percorrer (no interior da camada de ar) e à defasagem adicional que esse mesmo raio sofre ao ser refletido na interface inferior ar-vidro. Assim,

$$\Delta\phi' = \frac{2\pi \times 2d}{\lambda} + \pi \quad \therefore \quad \Delta\phi' = \left(\frac{4d}{\lambda} + 1\right)\pi.$$

(b) Para interferência construtiva, a diferença de fase deve corresponder a um múltiplo inteiro de $2\pi$. Logo,

$$\Delta\phi' = 2m\pi \quad \therefore \quad \left(\frac{4d}{\lambda} + 1\right)\pi = 2m\pi \quad \therefore \quad d = \frac{\lambda}{4}\left(2m - 1\right),$$

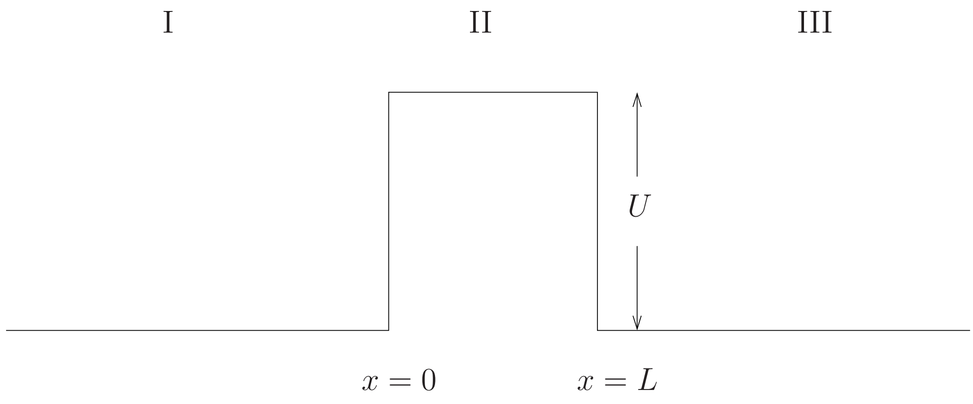
com $m = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots$. O menor valor de $d$ corresponde a $m = 1$, produzindo

$$d = \frac{\lambda}{4} = 100\,\text{nm}.$$

(c) O raio $r''$ percorre mais duas vezes a espessura da camada de ar, sofrendo duas reflexões adicionais, de modo que sua diferença de fase com relação ao raio $r'$ é

$$\Delta\phi'' = \frac{4\pi d}{\lambda} + 2\pi = 3\pi.$$

## Questão 4




Um elétron de energia $E$ atinge, a partir da esquerda, uma barreira de potencial de altura $U$, com $E < U$, e largura $L$.

(a) (1,5 pontos) Escreva as soluções gerais da equação de Schrödinger independente do tempo para este elétron nas 3 regiões da figura, explicitando sua dependência em $E$ e $U$.

(b) (0,5 ponto) Que condições de contorno devem ser satisfeitas nas duas fronteiras em $x = 0$ e $x = L$? (Não é necessário aplicá-las às soluções determinadas no item (a), basta dizer quais são.)

(c) (0,5 ponto) É possível encontrar a partícula na região III? Justifique.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 4}}$

(a) O elétron incide a partir da região I e tanto pode ser refletido na fronteira $x = 0$ quanto transmitido para a região II. A parte espacial da função de onda deve portanto ser escrita nessa região como

$$\psi_{\mathrm{I}}(x) = e^{ikx} + Re^{-ikx}, \qquad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}.$$

Na região II, como $U > E$, a equação de Schrödinger independente do tempo admite apenas soluções exponenciais com argumentos reais, da forma

$$\psi_{\mathrm{II}}(x) = C_1 e^{\kappa x} + C_2 e^{-\kappa x}, \qquad \kappa = \sqrt{\frac{2m(U-E)}{\hbar^2}}.$$

Finalmente, existe a possibilidade de que o elétron tunele através da região II para a região III, e a partir daí se propague livremente para a direita, de modo que

$$\psi_{\mathrm{III}}(x) = Te^{ikx}.$$

As constantes $R$, $C_1$, $C_2$ e $T$ devem ser determinadas a partir das condições de contorno e de normalização da função de onda.

(b) Em ambas as fronteiras, é preciso que tanto a função de onda quanto sua derivada sejam contínuas.

(c) Como o potencial entre $x = 0$ e $x = L$ é finito, é possível que se observe o tunelamento do elétron da região I para a região III.

## Formulário

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \quad X_L = \omega L, \quad X_C = \frac{1}{\omega C}, \quad \tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R}, \quad V_m = Z I_m,$$

$$P_{med} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos\phi, \quad V_{qm} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}, \quad I_{qm} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad \frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2}\ .$$

$$\vec{E} = E_m \cos(kx - \omega t + \phi)\hat{e}_y, \quad \vec{B} = B_m \cos(kx - \omega t + \phi)\hat{e}_z, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}. \quad k\,c = \omega.$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}, \quad S = uc, \quad u = u_e + u_m = \frac{\epsilon_0\, E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

$$I = < S > = \frac{E_m\, B_m}{2\mu_0}, \quad \text{média temporal: } < cos^2(kx - \omega t + \phi) > = 1/2.$$

$$p_{rad} = I/c, \quad p_{rad} = 2I/c, \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x).$$