Física IV - FAP2204

Escola Politécnica - 2011

GABARITO DA P1

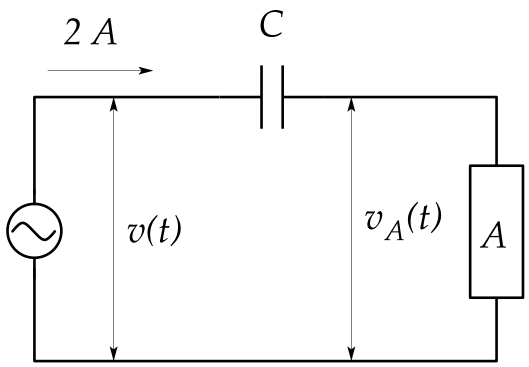
30 de agosto de 2011

Questão 1

Um circuito A é ligado em série com um capacitor a um gerador de corrente alternada com voltagem instantânea

$$v(t) = 100\cos(500t) \quad \text{(V)},$$

onde t é o tempo em segundos. A corrente está adiantada de 60° em relação à voltagem no gerador e o seu valor de pico é de 2 A. A voltagem nos terminais do circuito A está adiantada de 30° em relação à corrente.



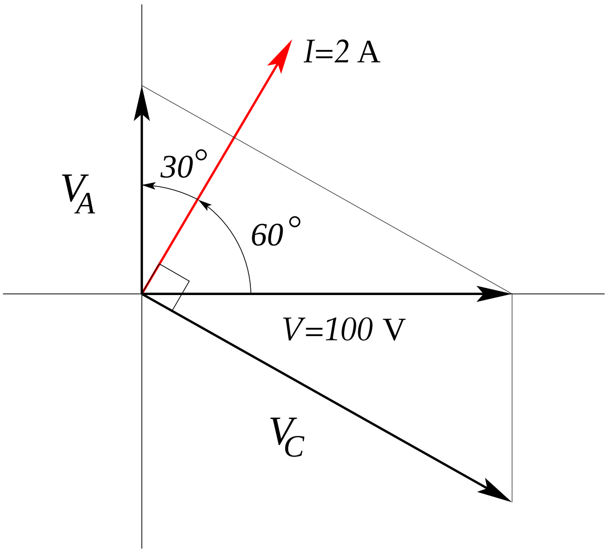
(a) (0,5 ponto) Construa o diagrama de fasores para a corrente e as voltagens no capacitor e no circuito A.

(b) (1,0 ponto) Determine a capacitância do capacitor.

(c) (1,0 ponto) Determine a voltagem instantânea $v_A(t)$ no circuito A.

Solução da questão 1

(a) Diagrama de fasores



(b) Voltagem no capacitor

$$V_C = \frac{V}{\cos 30^\circ} = \frac{200\sqrt{3}}{3}\ \text{V}.$$

Reatância capacitiva

$$X_C = \frac{V_C}{I} = \frac{100\sqrt{3}}{3}\ \Omega.$$

Capacitância

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{(500)(100\sqrt{3}/3)} = 2\sqrt{3} \times 10^{-5}\ \text{F}.$$

(c) Voltagem no circuito A

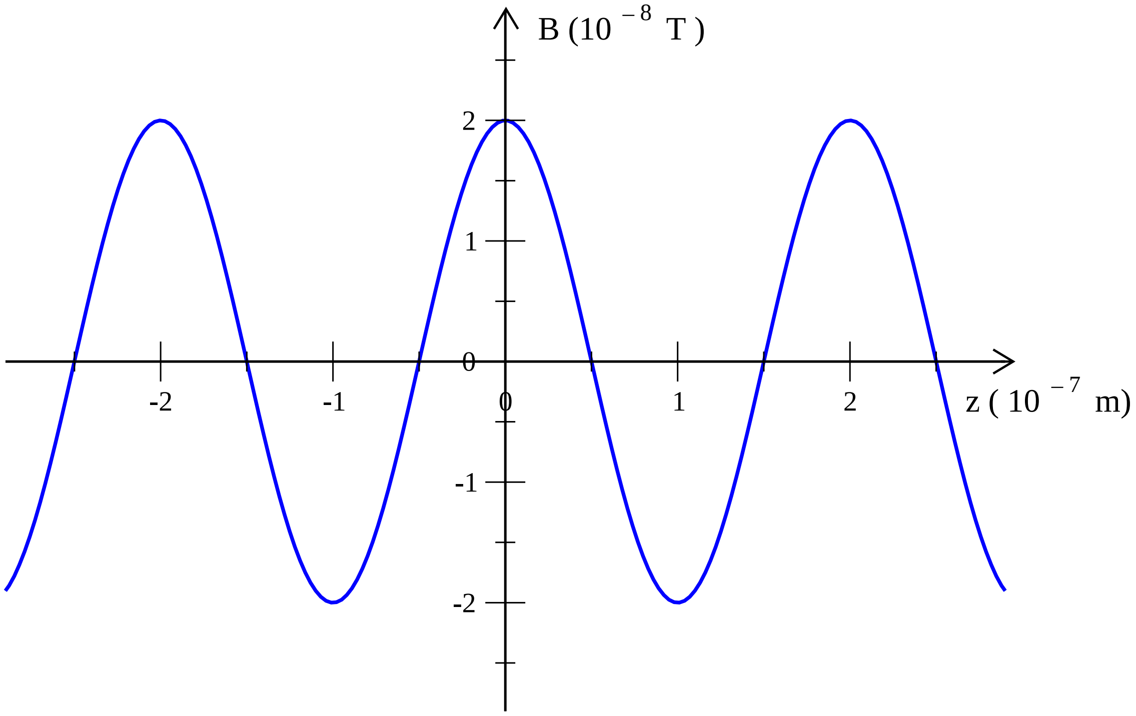
$$V_A = V \tan 30^\circ = \frac{100\sqrt{3}}{3}\ \text{V}.$$

Voltagem instantânea no circuito A

$$v_A(t) = \frac{100\sqrt{3}}{3}\cos(500t + 90^\circ) \quad (\text{V}).$$

Questão 2

Uma onda eletromagnética, plana e monocromática, se propaga no vácuo na direção positiva do eixo z. Seu campo magnético oscila na direção do eixo y e o gráfico de $B \times z$ é mostrado na figura abaixo para o instante $t = 0$.



(a) (0.5 ponto) Calcule o número de onda k e a frequência angular ω (use $c = 3 \times 10^8$ m/s para a velocidade da luz).

(b) (1,0 ponto) Escreva a expressão para o vetor campo magnético $\vec{B}$ para todo o espaço e para qualquer instante t.

(c) (1,0 ponto) Escreva a expressão para o vetor campo elétrico $\vec{E}$ para todo o espaço e para qualquer instante t.

Solução da questão 2

(a) Do gráfico vem que o comprimento de onda $\lambda = 2 \times 10^{-7}$ m. Portanto,

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda} = \pi \times 10^{7}\ \mathrm{m}^{-1}} \quad \text{e} \quad \boxed{\omega = kc = 3\pi \times 10^{15}\ \mathrm{s}^{-1}}.$$

(b) O campo magnético é dado por

$$\boxed{\vec{B} = 2 \times 10^{-8} \cos(\pi \times 10^{7}\, z - 3\pi \times 10^{15}\, t)\ \widehat{y}\ \mathrm{T}}$$

(c) O campo elétrico, o campo magnético e a direção de propagação formam um triedro destrógiro. Além disto, $|\vec{E}| = c|\vec{B}|$ portanto

$$\boxed{\vec{E} = 6 \cos(\pi \times 10^{7}\, z - 3\pi \times 10^{15}\, t)\ \widehat{x}\ \mathrm{V/m}}$$

Questão 3

A onda eletromagnética com campo elétrico $\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{x}$ incide perpendicularmente sobre uma placa totalmente refletora de área A.

(a) (1,0 ponto) Calcule o vetor de Poynting associado à onda.

(b) (1,0 ponto) Calcule a força média (vetor) exercida pela onda sobre a placa.

(c) (0,5 ponto) Calcule as densidades médias de energia e momento (módulo) transportadas pela onda.

Solução da questão 3

(a) O campo magnético é

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c}\cos(k\,z - \omega\,t)\,\widehat{y} \Longrightarrow \boxed{\vec{S} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0} = \epsilon_0 c E_0^2 \cos^2(k\,z - \omega\,t)\,\widehat{z}}\,,$$

onde usamos a relação $1/\mu_0 = \epsilon_0 c^2$.

(b) A força é

$$\vec{F} = P_{rad} A\,\widehat{z} = \frac{2 < S >}{c} A\,\widehat{z} = 2\epsilon_0 E_0^2 \frac{1}{2} A\,\widehat{z} \Longrightarrow \boxed{\vec{F} = \epsilon_0 E_0^2\,A\,\widehat{z}}\,.$$

(c) A densidade média de energia é

$$\boxed{< u >= \frac{< S >}{c} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}}$$

e a densidade média de momento é

$$\boxed{< p >= \frac{< u >}{c} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2c}}\,.$$

Questão 4

Suponha que o campo elétrico de uma onda eletromagnética no vácuo na ausência de cargas e correntes seja dado pela expressão

$$\vec{E} = (\vec{\imath}E_0 + \vec{\jmath}E_1)\cos(at + by),$$

onde E_0, E_1, a e $b > 0$ são constantes.

(a) (0,5 ponto) Partindo da lei de Gauss na forma diferencial determine E_1.

(b) (1,0 ponto) Partindo da lei de Faraday na forma diferencial determine o campo magnético associado ao campo elétrico dado.

(c) (1,0 ponto) Partindo da equação de onda satisfeita por $\vec{E}$ determine a relação entre as constantes a e b.

Solução da questão 4

(a) Da lei de Gauss

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = -\epsilon_0 E_1 b\,\mathrm{sen}(at + by) = 0.$$

Como $b > 0$, $\boxed{E_1 = 0}$.

(b) Da lei de Faraday

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial E_x}{\partial y}\vec{k} = \vec{k}E_0 b\,\mathrm{sen}(at + by).$$

Integrando

$$\boxed{\vec{B} = \vec{k}\frac{E_0 b}{a}\cos(at + by)}.$$

(c) Da equação de onda

$$\nabla^2 \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

obtemos

$$-E_0 b^2 \cos(at + by)\vec{\imath} = \epsilon_0 \mu_0 \left[-a^2 E_0 \cos(at + by)\vec{\imath}\right].$$

Logo

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \epsilon_0 \mu_0 \Longrightarrow \boxed{\frac{b}{a} = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}.$$

Formulário

$$Z=\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2},\quad X_L=\omega L,\quad X_C=\frac{1}{\omega C},\quad \tan\phi=\frac{X_L-X_C}{R},\quad V_m=ZI_m,$$

$$P_{med}=\frac{1}{2}V_mI_m\cos\phi,\quad V_{qm}=\frac{V_m}{\sqrt{2}},\quad I_{qm}=\frac{I_m}{\sqrt{2}},\quad \frac{V_1}{N_1}=\frac{V_2}{N_2}\ .$$

<u>Lei de Gauss:</u> $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{q_{int}}{\epsilon_0};\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0},$

<u>Lei de Gauss do magnetismo:</u> $\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{A}=0;\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0,$

<u>Lei de Faraday:</u> $\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell}=-\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{A};\quad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

<u>Lei de Ampère–Maxwell:</u> $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell}=\mu_0 I+\mu_0\epsilon_0\frac{d}{dt}\int_S \vec{E}\cdot d\vec{A};\ \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$

$$\nabla^2\vec{E}=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2},\quad \nabla^2\vec{B}=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2},\quad c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}},\quad |\vec{E}|=c|\vec{B}|.$$

$$I_D=\epsilon_0\frac{d\Phi_e}{dt}\quad \text{onde}\quad \Phi_e=\int_S \vec{E}\cdot d\vec{A}.$$

$$\vec{E}=E_m\cos(kx-\omega t+\phi)\widehat{e}_y,\quad \vec{B}=B_m\cos(kx-\omega t+\phi)\widehat{e}_z,\quad k=\frac{2\pi}{\lambda},\quad \omega=\frac{2\pi}{T}.\quad k\,c=\omega.$$

$$\vec{S}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B},\quad S=uc,\quad u=u_e+u_m=\frac{\epsilon_0\,E^2}{2}+\frac{B^2}{2\mu_0}.$$

$$I=<S>=\frac{E_m\,B_m}{2\mu_0},\quad \text{média temporal: } <cos^2(kx-\omega t+\phi)>=1/2.$$

$$P_{rad}=\frac{2I}{c}\ \text{e}\ P_{rad}=\frac{I}{c}\ ,\quad u=pc\ .$$

Para um campo vetorial $\vec{R}(x,y,z,t)=R_x(x,y,z,t)\vec{\imath}+R_y(x,y,z,t)\vec{\jmath}+R_z(x,y,z,t)\vec{k}$ temos

$$\vec{\nabla}\times\vec{R}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ R_x & R_y & R_z\end{vmatrix}\ ;\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{R}=\frac{\partial R_x}{\partial x}+\frac{\partial R_y}{\partial y}+\frac{\partial R_z}{\partial z}\ .$$