P2

Física IV - 4320402

Escola Politécnica - 2011

GABARITO DA P2

11 de outubro de 2011

Questão 1

Um filme fino de óleo com espessura t flutua sobre a água formando uma superfície plana. Os índices de refração da água e do óleo são respectivamente n_a e n_o, sendo $n_a > n_o$. Luz de comprimento de onda λ (valor no vácuo) incide normalmente sobre o filme.

(a) (1,0 ponto) Quais são os comprimentos de onda da luz na água e no óleo?

(b) (1,0 ponto) Determine as condições de interferência construtiva e destrutiva na reflexão da luz pela película de óleo.

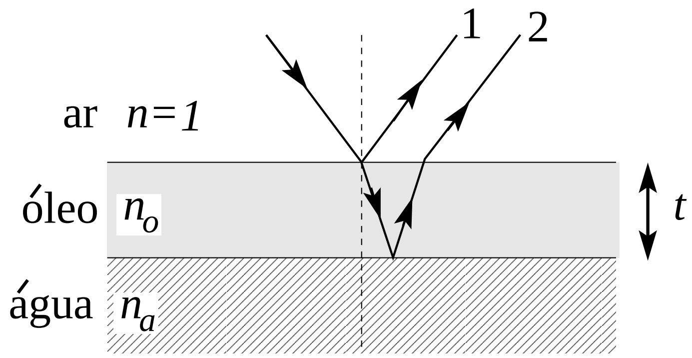
(c) (1,0 ponto) A luz visível compreende os comprimentos de onda no intervalo entre 400 nm e 700 nm. Se $t = 400$ nm, quais comprimentos de onda apresentam interferência construtiva nesse intervalo? Considere $n_a = 1,33$ e $n_0 = 1,30$.

Solução da questão 1

(a) Os comprimentos de onda da luz na água e no óleo são

$$\lambda_{\text{água}} = \frac{\lambda}{n_a}\ ; \qquad \lambda_{\text{óleo}} = \frac{\lambda}{n_o}\ .$$

(b) Os raios 1 e 2 na figura abaixo produzem a interferência observada.



A diferença de fase $\Delta\phi$ entre os raios 1 e 2 é

$$\Delta\phi = \underbrace{2\pi\frac{2t}{\lambda_{\text{óleo}}} + \pi}_{\text{raio 2}} - \underbrace{\pi}_{\text{raio 1}} = \frac{4\pi t n_o}{\lambda}$$

<u>Caso construtivo</u> $\longrightarrow \dfrac{4\pi t n_o}{\lambda} = 2m\pi \longrightarrow \boxed{\lambda = \dfrac{2tn_o}{m}}\ ,\ m = 1, 2, ...$

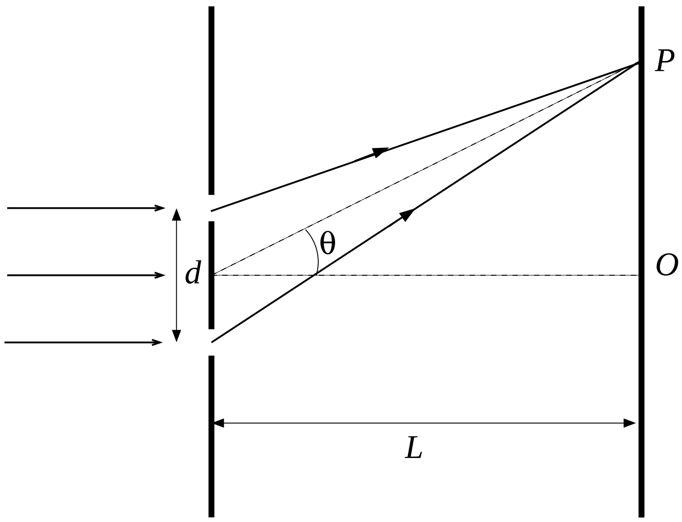
<u>Caso destrutivo</u> $\longrightarrow \dfrac{4\pi t n_o}{\lambda} = (2m+1)\pi \longrightarrow \boxed{\lambda = \dfrac{2tn_o}{m+1/2}}\ ,\ m = 0, 1, 2, ...$

(c) Para $t = 400$ nm e $n_o = 1,30$, os comprimentos de onda para os quais a interferência é construtiva são

$$\lambda = \frac{800 \times 1,3}{m} = \frac{1040}{m} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1040 \text{ nm} \quad \text{fora do intervalo} \\ \boxed{\lambda_2 = 520 \text{ nm} \quad \text{dentro do intervalo}} \\ \lambda_3 = 380 \text{ nm} \quad \text{fora do intervalo} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Questão 2

Em um experimento de Young, a separação $d = 6\ \mu$m entre as fendas é muito maior do que a largura delas. A luz que parte das fendas incide sobre um anteparo localizado a uma distância $L >> d$ muito grande, paralelo ao plano das fendas. Uma luz composta por duas ondas de comprimentos de onda λ_1 e λ_2 incide normalmente sobre o plano das fendas. São observados dois padrões de interferência no anteparo, cada um deles correspondendo a uma das componentes.



(a) (0,5 ponto) A componente com λ_1 produz o primeiro <u>máximo</u> para $\theta > 0$, a um ângulo de observação θ_1 tal que $\operatorname{sen}\theta_1 = 0.08$. Determine λ_1.

(b) (0,5 ponto) A componente com λ_2 produz o primeiro <u>mínimo</u> para $\theta > 0$, a um ângulo de observação θ_2 tal que $\operatorname{sen}\theta_2 = 0.05$. Determine λ_2.

(c) (1,0 ponto) Para $\theta = 0$ os máximos de λ_1 e λ_2 se sobrepõem. Qual é o menor valor de $\theta > 0$ para o qual os máximos de λ_1 e λ_2 vão se sobrepor novamente?

Solução da questão 2

(a) Para λ_1 os máximos ocorrem quando

$$\left.\begin{array}{l} d\,\mathrm{sen}\,\theta_1 = m_1\lambda_1 \\ \text{primeiro máx. para } \theta > 0 \ (m_1 = 1) \text{ em } \mathrm{sen}\,\theta_1 = 0,08 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\lambda_1 = 480 \text{ nm}}\ .$$

(b) Para λ_2 os mínimos ocorrem quando

$$\left.\begin{array}{l} d\,\mathrm{sen}\,\theta_2 = \left(m_2 + \dfrac{1}{2}\right)\lambda_2 \\ \text{primeiro mín. para } \theta > 0 \ (m_2 = 0) \text{ em } \mathrm{sen}\,\theta_2 = 0,05 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\lambda_2 = 600 \text{ nm}}\ .$$

(c) Os máximos são dados por

$$\begin{cases} \text{máx. de } \lambda_1 \longrightarrow \mathrm{sen}\,\theta_1 = m_1\dfrac{\lambda_1}{d}\ ; \qquad m_1 = 0, \pm 1, \pm 2, ... \\ \\ \text{máx. de } \lambda_2 \longrightarrow \mathrm{sen}\,\theta_2 = m_2\dfrac{\lambda_2}{d}\ ; \qquad m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, ... \end{cases}$$

Se os máximos coincidem, $\theta_1 = \theta_2$ e portanto

$$m_1\lambda_1 = m_2\lambda_2 \Leftrightarrow 4m_1 = 5m_2\ .$$

Os menores inteiros positivos que satisfazem a equação acima são $m_1 = 5$ e $m_2 = 4$. Substituindo, por exemplo, $m_1 = 5$ na equação que fornece os máximos de λ_1 obtemos

$$\mathrm{sen}\,\theta_1 = 5\frac{4,8 \times 10^{-7}}{6 \times 10^{-6}} = 0,4 \Longrightarrow \boxed{\theta_1 = \theta_2 = \mathrm{arcsen}\,(0,4)}\ .$$

Questão 3

Quando Marte está próximo da Terra a distância L entre os dois planetas é aproximadamente igual a 6×10^7 km. Suponha que Marte seja observado através de um telescópio com espelho de diâmetro $D = 30$ cm.

(a) (0,5 ponto) Qual é a resolução angular do telescópio para luz com um comprimento de onda $\lambda = 600$ nm?

(b) (1,0 ponto) Qual é a menor distância d que pode ser resolvida entre dois pontos na superfície de Marte com luz de comprimento de onda $\lambda = 600$ nm?

(c) (0,5 ponto) Para luz com comprimento de onda $\lambda' = 700$ nm, qual deveria ser o diâmetro D' do espelho para se obter a resolução angular do item (a)?

$\boxed{\textbf{Solução da questão 3}}$

(a) A resolução angular do telescópio é limitada pela difração causada pela abertura circular. Pelo critério de Rayleigh ela é dada por

$$\theta_{mín} = 1,22\frac{\lambda}{D} = \frac{1,22 \times 600 \times 10^{-9}}{0,3} \Longrightarrow \boxed{\theta_{mín} \approx 2,4 \times 10^{-6} \text{ rad}}.$$

(b) A distância mínima d para resolver dois pontos é

$$d \approx L\theta_{mín} = (6 \times 10^{10})(2,4 \times 10^{-6}) \Longrightarrow \boxed{d \approx 1,4 \times 10^{5} \text{ m}}.$$

(c) Para obtermos a mesma resolução com os dois comprimentos de onda devemos ter

$$\theta_{mín}(\lambda) = \theta_{mín}(\lambda') \Longrightarrow \frac{\lambda}{D} = \frac{\lambda'}{D'} \Longrightarrow D' = \frac{\lambda'}{\lambda}\, D = \frac{700}{600}30 \Longrightarrow \boxed{D' = 35 \text{ cm}}.$$

Questão 4

Nos itens abaixo, considere h e c dados.

(a) (1,0 ponto) A função de trabalho de um metal é ϕ. Calcule o maior comprimento de onda λ_0 da radiação que ao incidir sobre este metal ejeta elétrons da sua superfície.

(b) (1,0 ponto) Deseja-se que o processo do ítem (a) seja efetuado com radiação proveniente de uma esfera aquecida a uma temperatura T (em kelvins). Suponha que a esfera irradia como um corpo negro e que o comprimento de onda λ_m para o qual a emitância espectral (potência irradiada por unidade de área por unidade de comprimento de onda) é máxima seja igual a λ_0, calculado no item (a). Determine T em termos de ϕ.

(c) (1,0 ponto) Se a esfera tem raio R quantos fótons com comprimento de onda no intervalo $[\lambda_0, \lambda_0 + \Delta\lambda]$ com $\Delta\lambda/\lambda_0 << 1$ são emitidos por segundo, nas condições do item (b)?

$\boxed{\textbf{Solução da questão 4}}$

(a) A energia cinética dos elétrons ejetados do metal por radiação de comprimento de onda λ é

$$E_{cin} = \frac{hc}{\lambda} - \phi \ .$$

No caso limite $E_{cin} = 0$, portanto

$$\frac{hc}{\lambda_0} = \phi \Longrightarrow \boxed{\lambda_0 = \frac{hc}{\phi}} \ .$$

(b) O comprimento de onda em que um corpo negro irradia mais intensamente é dado pela lei de deslocamento de Wien

$$\lambda_m T = 2,90 \times 10^{-3} \ \mathrm{m} \cdot \mathrm{K} \ .$$

Para $\lambda_m = \lambda_0$ obtemos

$$\frac{hc}{\phi} T = 2,90 \times 10^{-3} \Longrightarrow \boxed{T = \frac{2,9 \times 10^{-3}}{hc} \phi \ \mathrm{K}} \ .$$

(c) A expressão

$$I(\lambda_0)\Delta\lambda = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda_0^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda_0 kT} - 1} \Delta\lambda$$

representa a potência irradiada por unidade de área, no intervalo $[\lambda_0, \lambda_0 + \Delta\lambda]$ de comprimentos de onda. A energia por segundo irradiada pela esfera neste intervalo é

$$P = I(\lambda_0)\Delta\lambda 4\pi R^2 \ .$$

Todos os fótons no intervalo $[\lambda_0, \lambda_0 + \Delta\lambda]$ com $\Delta\lambda << \lambda_0$ têm energia aproximadamente igual a $E_\gamma = hc/\lambda_0$. Portanto, o número de fótons por segundo é

$$N = \frac{P}{E_\gamma} = \frac{I(\lambda_0)\Delta\lambda 4\pi R^2}{hc/\lambda_0} \Longrightarrow \boxed{N = \frac{I(\lambda_0)\lambda_0 \Delta\lambda 4\pi R^2}{hc}} \ .$$

Formulário

$1 \text{ nm} = 10^{-9}$ m; $1\ \mu\text{m} = 10^{-6}$ m

$d\text{sen}\theta = m\lambda \quad m = 0, \pm1, \pm2, ...$

$d\text{sen}\theta = (m + 1/2)\lambda \quad m = 0, \pm1, \pm2, ...$

$I = I_0 \cos^2(\phi/2), \quad \phi = 2\pi d\,\text{sen}\,\theta/\lambda$

$a\,\text{sen}\,\theta = m\lambda, \quad m = \pm1, \pm2, \pm3...$

$I = I_0 \left[\frac{\text{sen}\,(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2, \quad \beta = 2\pi a\,\text{sen}\,\theta/\lambda\ , \qquad \theta_{mín} = 1,22\frac{\lambda}{D}$

Intensidade total $I = \sigma T^4, \quad \lambda_m T = 2,90 \times 10^{-3}\ \text{m}\cdot\text{K}\ , \quad I(\lambda) = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}\ .$

$E_f = hf = hc/\lambda, \quad E_{cin}^{max} = hf - \phi$