P3

Física IV - 4320402

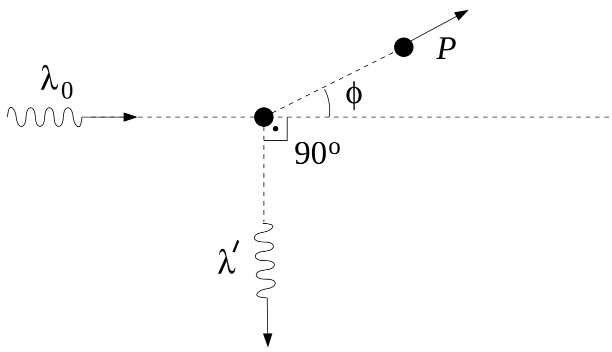
Escola Politécnica - 2011

GABARITO DA P3

22 de novembro de 2011

Questão 1

Um feixe de fótons com comprimento de onda $\lambda_0 = \dfrac{h}{mc}$ (m sendo a massa de repouso do elétron e c a velocidade da luz) incide sobre elétrons em repouso. Um fóton do feixe é espalhado em uma direção perpendicular à direção de incidência, conforme a figura. Para as perguntas abaixo, forneça respostas apenas em termos de m e de c.



(a) (1,5 ponto) Calcule o módulo do momento do elétron, P, após o espalhamento.

(b) (1,0 ponto) Calcule a energia cinética desse elétron.

Solução da questão 1

(a) Como o espalhamento se dá em um ângulo $\theta = 90°$, a conservação do momento requer que

$$P\cos\phi = p = \frac{h}{\lambda}, \tag{1}$$

$$P\text{sen}\phi = p' = \frac{h}{\lambda'}, \tag{2}$$

sendo P o momento do elétron após o espalhamento, ϕ seu ângulo de espalhamento, p e $\lambda = \lambda_0$ o momento e o comprimento de onda do fóton antes do espalhamento, e p' e λ' o momento e o comprimento de onda do fóton após o espalhamento. Note que os comprimentos de onda λ' e λ estão relacionados através de

$$\lambda' = \lambda + \lambda_0\,(1 - \cos\theta) = 2\lambda_0.$$

Elevando ao quadrado e as equações (1) e (2) e somando as equações resultantes, obtemos

$$P^2 = h^2\left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda'^2}\right) = h^2\left(\frac{1}{\lambda_0^2} + \frac{1}{4\lambda_0^2}\right),$$

e daí

$$P^2 = \frac{5}{4}\frac{h^2}{\lambda_0^2} = \frac{5}{4}\frac{h^2}{\frac{h^2}{m^2c^2}} = \frac{5}{4}m^2c^2 \Longrightarrow \boxed{P = \sqrt{\frac{5}{4}}mc}\,.$$

(b) A energia cinética do elétron, K, pode ser calculada pela diferença entre a energia do fóton incidente e a energia do fóton espalhado,

$$K = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} = hc\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{2\lambda_0}\right) = \frac{hc}{2\lambda_0} \Longrightarrow \boxed{K = \frac{hc}{2\frac{h}{mc}} = \frac{1}{2}mc^2}\,.$$

<u>Alternativamente</u>, K pode ser calculada diretamente a partir das expressões relativísticas para a energia do elétron após a colisão e para sua energia de repouso,

$$E_{\text{repouso}} = mc^2, \qquad E_{\text{depois}} = \sqrt{P^2c^2 + m^2c^4}.$$

A energia cinética é então

$$K = E_{\text{depois}} - E_{\text{repouso}},$$

e com o auxílio do resultado do item anterior temos

$$K = \sqrt{\frac{5}{4}m^2c^4 + m^2c^4} - mc^2 \Longrightarrow \boxed{K = \frac{1}{2}mc^2}\,.$$

Questão 2

A função de onda de uma partícula de massa m é dada por

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{x/a} & \text{para} \quad -\infty < x < 0\,, \\ Ae^{-x/a} & \text{para} \quad 0 \leq x < \infty\,, \end{cases}$$

sendo A e a constantes positivas.

(a) (1,0 ponto) Calcule a constante de normalização A.

(b) (1,0 ponto) Calcule a probabilidade de encontrar a partícula na região $-a \leq x \leq a$.

(c) (0,5 ponto) Baseado no resultado do item (b) estime o valor da incerteza na posição dessa partícula. O que se pode afirmar sobre a incerteza no momento dessa partícula?

<u>Dados:</u> $e^{-1} \approx 0,368$ e $e^{-2} \approx 0,135$.

Solução da questão 2

(a) Como o módulo quadrado da função de onda, $|\psi(x)|^2$, está relacionado à probabilidade de encontrar a partícula em torno do ponto x, a condição de normalização é

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1,$$

e portanto temos

$$A^2 \int_{-\infty}^{0} e^{2x/a} dx + A^2 \int_{0}^{\infty} e^{-2x/a} dx = 2A^2 \int_{0}^{\infty} e^{-2x/a} dx = 1.$$

A integral acima pode ser calculada definindo $u = 2x/a$, tal que

$$\int_{0}^{\infty} e^{-2x/a} dx = \frac{a}{2} \int_{0}^{\infty} e^{-u} du = \frac{a}{2}.$$

Portanto,

$$2A^2 \frac{a}{2} = A^2 a = 1 \Longrightarrow \boxed{A = \sqrt{\frac{1}{a}}}.$$

(b) A probabilidade P de encontrar a partícula no intervalo $-a \leq x \leq a$ é dada por

$$P = \int_{-a}^{a} |\psi(x)|^2 \, dx = \frac{1}{a} \int_{-a}^{a} e^{-2|x|/a} dx = \frac{2}{a} \int_{0}^{a} e^{-2x/a} dx.$$

Novamente definindo $u = 2x/a$, a integral na expressão acima é calculada como

$$\int_{0}^{a} e^{-2x/a} dx = \frac{a}{2} \int_{0}^{2} e^{-u} du = \frac{a}{2} \left(1 - e^{-2}\right),$$

de modo que

$$\boxed{P = 1 - e^{-2} \approx 0.865}.$$

(c) No item (b) vimos que a probabilidade de encontrar a partícula no intervalo $[-a, a]$ é de cerca de 86%. Assim, é razoável usar $\Delta x = 2a$ como estimativa para a incerteza na posição da partícula. Portanto,

Segundo o princípio de incerteza de Heisenberg, o produto das incertezas na posição, Δx, e no momento associado, Δp_x, deve ser tal que

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{1}{2}\hbar \Longrightarrow 2a\Delta p_x \geq \frac{1}{2}\hbar \Longrightarrow \boxed{\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{4a}}.$$

O valor preciso do fator numérico em frente à fração $\hbar/a$ não é importante.

Questão 3

Uma partícula de massa m executa oscilações harmônicas ao longo do eixo x num potencial $m\omega^2 x^2/2$, onde ω é uma constante.

(a) (0,5 ponto) Escreva a equação de Schrödinger independente do tempo para a partícula.

(b) (1,0 ponto) Considere a função de onda $\psi(x) = Ae^{-bx^2}$, onde A e b são constantes. Determine o valor de b para que ψ seja solução da equação do item (a). Qual é o valor da energia associada a esta função de onda?

(c) (1,0 ponto) Calcule a constante de normalização A.

<u>Dado:</u> $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2) = \sqrt{\pi/\alpha}$

Solução da questão 3

(a) A equação de Schrödinger é

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\psi = E\psi$$

(b) Precisamos da derivada segunda de $\psi(x) = A\exp(-bx^2)$

$$\frac{d\psi}{dx} = -Ae^{-bx^2}2bx$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = Ae^{-bx^2}4b^2x^2 - Ae^{-bx^2}2b = 2(2b^2x^2 - b)\psi.$$

Substituindo na eq. de Schrödinger obtemos

$$-\frac{\hbar^2}{2m}2(2b^2x^2 - b)\psi + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi = E\psi$$

$$\Longrightarrow \left[-\frac{\hbar^2 2b^2}{m} + \frac{1}{2}m\omega^2\right]x^2 + \frac{\hbar^2 b}{m} - E = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} b^2 = \dfrac{m^2\omega^2}{4\hbar^2} \Longrightarrow \boxed{b = \dfrac{m\omega}{2\hbar}} \quad (b < 0 \Longrightarrow \psi \quad \text{não normalizável}) \\ E = \dfrac{\hbar^2 b}{m} \Longrightarrow \boxed{E = \hbar\omega/2} \end{cases}$$

(c) A constante A é determinada impondo-se $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2\,dx = 1$

$$\Longrightarrow A^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2bx^2}dx = 1 \Longrightarrow A^2\sqrt{\frac{\pi}{2b}} = 1$$

$$\boxed{A = \left(\frac{2b}{\pi}\right)^{1/4} = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}}$$

Questão 4

Para preencher com elétrons as subcamadas de um átomo usa-se a regra: as subcamadas que têm o menor valor de $n+\ell$ são preenchidas antes; se duas subcamadas têm o mesmo valor de $n+\ell$, preenche-se antes a subcamada com menor valor de n.

(a) (1,5 ponto) Use a regra acima para escrever a configuração eletrônica do Sc, que é o elemento com número atômico mais baixo com um elétron na subcamada d.

(b) (1,0 ponto) Quais são os valores possíveis do módulo do momento angular e de sua componente z para o elétron d do Sc?

Solução da questão 4

(a) Configuração eletrônica do Sc: $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 4s^2\ 3d^1$.

Note que $4s$ tem $n+\ell=4$ e $3d$ tem $n+\ell=5$. Portanto $4s$ vem antes de $3d$.

(b) O módulo do momento angular L e sua componente L_z podem assumir os seguintes valores:

$$d \longrightarrow \ell = 2 \Longrightarrow m_\ell = -2, -1, 0, 1, 2$$

$$L = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)} = \hbar\sqrt{6}$$

$$L_z = \hbar m_\ell \Longrightarrow L_z = -2\hbar\ , -\hbar\ , 0\ , \hbar\ , 2\hbar$$

Formulário

$E = hf = hc/\lambda, \quad E = pc,$

$E = m_0\gamma c^2, \quad \vec{p} = m_0\gamma\vec{v}, \quad E_{cin} = m_0\gamma c^2 - m_0c^2$, onde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$,

$E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}, \quad \lambda' = \lambda + \lambda_0(1 - \cos\theta)$, onde $\lambda_0 = h/(m_0c)$.

$\Delta p\, \Delta x \geq \hbar/2, \quad \Delta E\, \Delta t \geq \hbar/2, \quad \hbar = h/(2\pi).$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x).$$

$L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar,\ L_z = m_\ell\,\hbar,\ S = \sqrt{s(s+1)}\,\hbar,\ S_z = m_s\,\hbar.$