Física IV - 4320402

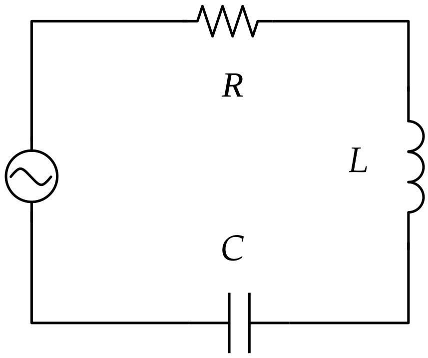
Escola Politécnica - 2011

GABARITO DA PR

14 de fevereiro de 2012

Questão 1

Uma associação em série de resistor, indutor e capacitor é ligada a um gerador de corrente alternada de frequência regulável e tensão eficaz $V = 500$ V.



À frequência angular $\omega = 100$ rd/s a corrente eficaz é $I = 1$ A e a potência média recebida pelo circuito é P =300 W.

(a) (1,0 pontos) Determine a magnitude da impedância da associação RLC, a resistência do resistor, e o fator de potência.

(b) (1,0 ponto) À frequência angular de $\omega' = 200$ rd/s a potência média recebida é a mesma daquela a $\omega = 100$ rd/s. Determine a frequência angular de ressonância ω_0.

(c) (0,5 ponto) Determine a indutância do indutor e a capacitância do capacitor.

Solução da questão 1

(a) Magnitude da impedância da associação RLC

$$|Z| = \frac{V}{I} = \frac{500}{1} = 500\ \Omega.$$

Resistência do resistor

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{300}{1^2} = 300\ \Omega.$$

Fator de potência

$$\cos\phi = \frac{P}{VI} = \frac{300}{500} = 0,6.$$

(b) Potência média no circuito como função de ω

$$P(\omega) = \frac{RV^2}{R^2 + X(\omega)^2}, \qquad X(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega C}.$$

$P(\omega) = P(\omega')$ implica $X(\omega) = -X(\omega')$. Logo

$$LC = \frac{1}{\omega\omega'} \quad \text{e} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\omega\omega'} = 100\sqrt{2}\ \text{rd/s}.$$

(c) À frequência $\omega = 100$ rd/s $< \omega_0$ o circuito é capacitivo. Logo

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = -\sqrt{|Z|^2 - R^2} = -\sqrt{500^2 - 300^2} = -400\ \Omega.$$

Juntamente com $LC = 1/\omega\omega'$ resulta

$$C = \frac{\omega - \omega'}{X\omega\omega'} = 12,5\ \mu\text{F} \quad \text{e} \quad L = \frac{X}{\omega - \omega'} = 4\ \text{H}.$$

Questão 2

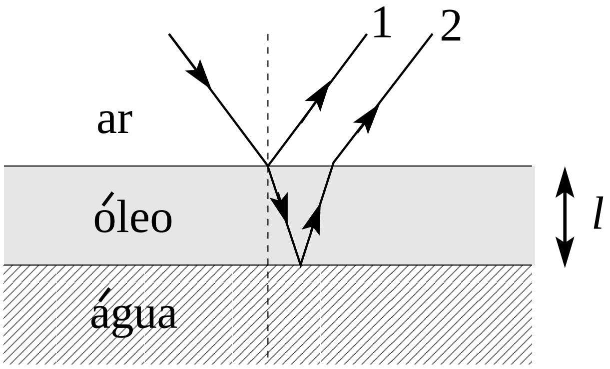
Um filme de óleo flutua sobre uma poça de água. Observa-se que o filme parece escuro quando iluminado com luz monocromática cujo comprimento de onda no vácuo vale 600 nm (A luz incide a partir do ar normalmente sobre a película de óleo.).

(a) (1,5 ponto) Sabendo-se que os índices de refração do ar, da água e do óleo valem respectivamente $n_{ar} = 1,0$, $n_A = 1,3$ e $n_O = 1,5$, calcule a menor espessura l possível para a película de óleo.

(b) (1,0 ponto) Considerando que o espectro da luz visível se estende entre 380 e 750 nm, determine para quais comprimentos de onda (no vácuo) o filme parecerá claro.

Solução da questão 2

(a) O filme de óleo aparece escuro por que os raios 1 e 2 na figura interferem destrutivamente.



A diferença de fase $\Delta\phi$ entre os raios 1 e 2 é $(n_{ar} < n_A < n_O)$

$$\Delta\phi = \underbrace{2\pi \frac{2l}{\lambda_{\text{óleo}}}}_{\text{raio 2}} - \underbrace{\pi}_{\text{raio 1}} = \frac{4\pi l n_O}{\lambda} - \pi\ .$$

Para haver interferência destrutiva

$$\Delta\phi = \frac{4\pi l n_O}{\lambda} - \pi = \left(m + \frac{1}{2}\right) 2\pi \Longrightarrow \frac{2ln_O}{\lambda} = m+1 \Longrightarrow l = \frac{(m+1)\lambda}{2n_O} = 200(m+1)\ \text{nm}\ .$$

A espessura mínima é obtida com $m = 0$. Portanto $\boxed{l_{\text{mín}} = 200\ \text{nm}}$.

(b) O filme fica claro quando há interferência construtiva. Isto ocorre quando

$$\Delta\phi = \frac{4\pi l n_O}{\lambda} - \pi = 2\pi m \Longrightarrow \frac{2ln_O}{\lambda} = m + \frac{1}{2} \Longrightarrow \lambda = \frac{2ln_O}{m+1/2} = \frac{600}{m+1/2}\ \text{nm}\ .$$

$$\lambda = \frac{600}{m+1/2} \Longrightarrow \begin{cases} m = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 1200\ \text{nm} \quad \text{fora do intervalo} \\ m = 1 \longrightarrow \boxed{\lambda_2 = 400\ \text{nm} \quad \text{dentro do intervalo}} \\ m = 2 \longrightarrow \lambda_3 = 240\ \text{nm} \quad \text{fora do intervalo} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Questão 3

Luz monocromática com comprimento de onda λ no vácuo e de intensidade I incide normalmente sobre um catodo metálico plano de área A no interior de uma célula fotoelétrica. As respostas às questões abaixo devem ser dadas com dois algarismos significativos, por exemplo: $423 \longrightarrow 4,2 \times 10^2$, 7,68 $\longrightarrow$ 7,7 e assim por diante.

(a) (1,0 ponto) Supondo que a função de trabalho do metal do catodo seja igual a 2,2 eV qual é a frequência mínima dos fótons incidentes para que fotoelétrons sejam ejetados?

(b) (0,5 ponto) Se o comprimento de onda λ da luz incidente é de 500 nm, os fótons que a compõem são capazes de produzir fotoelétrons? Justifique. Calcule a energia E_f destes fótons.

(c) (1,0 ponto) Determine o número de fótons por segundo N_f que incidem sobre o catodo supondo que a intensidade I =20 W/m^2 e A =2,0 cm^2. Se apenas 10% dos fótons incidentes produzem fotoelétrons qual é a corrente elétrica produzida pela célula?

Dados: $h = 4,1 \times 10^{-15}$ eV·s, $c = 3,0 \times 10^8$ m/s, 1 nm= 10^{-9}m, 1 eV = $1,6 \times 10^{-19}$ J e carga do elétron $q_e = 1,6 \times 10^{-19}$C.

Solução da questão 3

(a) A energia cinética dos fotoelétrons é igual a $E_{cin} = hf - \Phi$, onde Φ é a função de trabalho do metal. No limiar do efeito fotoelétrico $E_{cin} = 0$. Assim, para que os elétrons sejam arrancados do metal devemos ter

$$hf - \Phi > 0 \Longrightarrow f > \frac{\Phi}{h} = \frac{2,2}{4,1} \times 10^{15} \approx 5,4 \times 10^{14} \text{ Hz}.$$

(b) Ao comprimento de $\lambda = 500$ nm está associada a frequência

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^{8}}{500 \times 10^{-9}} = 6,0 \times 10^{14} \text{ Hz}.$$

Esta frequência está acima da mínima calculada no item (a). Portanto, haverá fotoelétrons. A energia de cada fóton é

$$E_f = hf = (4,1 \times 10^{-15})(6,0 \times 10^{14}) \approx 2,5 \text{ eV}$$

(c) O número de fótons por segundo que incidem sobre a placa é

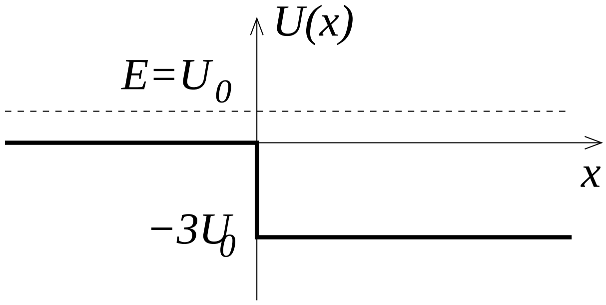
$$N_f = \frac{I\ A}{E_f} = \frac{20 \times 2 \times 10^{-4}}{2,5 \times 1,6 \times 10^{-19}} \approx 1,0 \times 10^{16} \text{ fótons/s}.$$

A corrente é

$$i = 0,10 \times N_f \times q_e = 0,10(1,0 \times 10^{16})(1,6 \times 10^{-19}) = 1,6 \times 10^{-4} \text{ amperes}.$$

Questão 4

Uma partícula de massa m está sujeita a uma energia potencial igual a zero para $x < 0$, e igual a $-3U_0$ para $x > 0$, com $U_0 > 0$, conforme a figura.



(a) (0,5 ponto) Escreva e equação de Schrödinger para a partícula na região 1 ($x < 0$) e na região 2 ($x > 0$).

(b) (1,0 ponto) Se a partícula foi lançada a partir da região $x < 0$ com energia total $E = U_0 > 0$, sua função de onda pode ser escrita como

$$\begin{cases} \psi_1(x) = e^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \quad \text{para} \quad x < 0\ , \\ \psi_2(x) = Ce^{ik_2x} \quad \text{para} \quad x > 0\ . \end{cases}$$

Use a equação de Schrödinger para calcular k_1 e k_2 em função de U_0, m e $\hbar$.

(c) (1,0 ponto) Usando as condições de contorno que ψ_1 e ψ_2 devem satisfazer em $x = 0$, calcule B e C. Se você não resolveu o item (b) calcule B e C em termos de k_1 e k_2.

Solução da questão 4

(a) A equação de Schrödinger é

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+U(x)\psi(x)=E\psi(x)\ .$$

Substituindo a expressão para o potencial $U(x)$ e colocando $E=U_0$ obtemos

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2}=U_0\psi_1(x)\quad \text{para}\quad x<0\ , \tag{1}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2}=4U_0\psi_2(x)\quad \text{para}\quad x>0\ . \tag{2}$$

(b) Note que

$$\frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2}=-k_1^2(e^{ik_1x}+Be^{-ik_1x})=-k_1^2\psi_1(x)\ , \tag{3}$$

$$\frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2}=-k_2^2Ce^{ik_2x}=-k_2^2\psi_2(x)\ . \tag{4}$$

Substituindo (3) em (1) e (4) em (2) obtemos

$$\frac{\hbar^2}{2m}k_1^2\psi_1(x)=U_0\psi_1(x)\ ,\Longrightarrow \boxed{k_1=\frac{\sqrt{2mU_0}}{\hbar}}\ ,$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}k_2^2\psi_2(x)=4U_0\psi_2(x)\Longrightarrow \boxed{k_2=2\frac{\sqrt{2mU_0}}{\hbar}}\ .$$

(c) A função de onda e sua derivada devem ser contínuas em $x=0$. Temos assim

$$\left\{\begin{array}{rcl}\psi_1(0)&=&\psi_2(0)\\ \psi_1'(0)&=&\psi_2'(0)\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{rcl}1+B&=&C\\ ik_1-ik_1B&=&ik_2C\end{array}\right.\ ,$$

e resolvendo o sistema de equações acima e usando que $k_2=2k_1$ chegamos a

$$k_1(1-B)=k_2(1+B)\quad\Rightarrow\quad \boxed{B=-\frac{k_2-k_1}{k_2+k_1}=-\frac{1}{3}},$$

$$C=1+B\quad\Rightarrow\quad \boxed{C=\frac{2k_1}{k_2+k_1}=\frac{2}{3}}.$$

Formulário

$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \quad X_L = \omega L, \quad X_C = \dfrac{1}{\omega C}, \quad \tan\phi = \dfrac{X_L - X_C}{R},$

$V_m = Z I_m, \quad P_{med} = \dfrac{1}{2} V_m I_m \cos\phi, \quad V_{qm} = \dfrac{V_m}{\sqrt{2}}, \quad I_{qm} = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad \dfrac{V_1}{N_1} = \dfrac{V_2}{N_2}\ .$

$E = hf = hc/\lambda, \quad E = pc, \quad E_{cin} = hf - \Phi$

$E = m_0\gamma c^2, \quad \vec{p} = m_0\gamma\vec{v}, \quad E_{cin} = m_0\gamma c^2 - m_0 c^2$, onde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$,

$E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}, \quad \lambda' = \lambda + \lambda_0(1 - \cos\theta)$, onde $\lambda_0 = h/(m_0 c)$.

$\Delta p\,\Delta x \geq \hbar/2, \quad \Delta E\,\Delta t \geq \hbar/2, \quad \hbar = h/(2\pi).$

$-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x).$