Física IV - 4320402

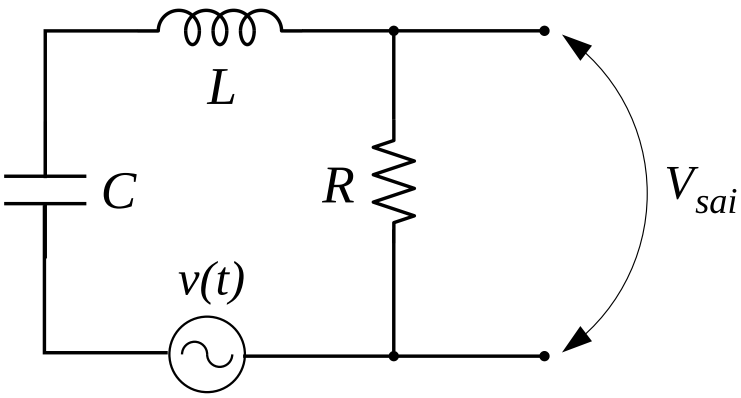
Escola Politécnica - 2011

GABARITO DA PS

29 de novembro de 2011

Questão 1

A figura abaixo mostra um circuito RLC com os terminais do resistor conectados a terminais de saída. A amplitude da voltagem de saída é V_{sai}. Suponha que a fonte $v(t)$ esteja ligada por um tempo t muito longo e que possua uma dependência temporal oscilatória, com frequência ω, da forma $v(t) = V_m \text{sen}(\omega t)$.



(a) (1,0 ponto) Determine a razão V_{sai}/V_m em função de R, L, C e ω.

(b) (0,5 ponto) Para qual frequência a razão determinada no ítem anterior será máxima. Determine o valor numérico de V_{sai}/V_m nessa frequência.

(c) (1,0 ponto) Suponha que o capacitor seja eliminado do circuito, sendo substituído por um fio de resistência nula. Neste caso, escreva a expressão para V_{sai}/V_m. Calcule V_{sai}/V_m nos limites $\omega \gg R/L$ e $\omega \ll R/L$. Explique qualitativamente os resultados encontrados nestes limites.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 1}}$

(a) A amplitude da voltagem de saida está relacionada com R segundo

$$V_{sai} = RI_m,$$

em que I_m é a amplitude da corrente no circuito. Na situação estacionária, teremos

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}}.$$

Logo

$$\frac{V_{sai}}{V_m} = \frac{R}{\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}}.$$

(b) Na ressonância, quando $\omega L = 1/(\omega C)$, ou seja $\omega = 1/\sqrt{LC}$, teremos o valor máximo dado por

$$\frac{V_{sai}}{V_m} = \frac{R}{\sqrt{0 + R^2}} = 1.$$

(c) Quando não há capacitância, a expressão para V_{sai}/V_m calculada no item (a) se torna

$$\frac{V_{sai}}{V_m} = \frac{R}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}} = \frac{R}{L}\frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \left(\frac{R}{L}\right)^2}},$$

de modo que $V_{sai}/V_m \to 0$ quando $\omega \gg R/L$ e $V_{sai}/V_m \to 1$ quando $\omega \ll R/L$. Quando só há reatância indutiva ($C = 0$), as frequências altas serão atenuadas já que o indutor tende a criar uma oposição à variações rápidas de corrente, de acordo com a Lei de Faraday. Por outro lado, no limite de baixas frequências a influência do indutor é nula, a ddp no resistor é igual à ddp no gerador e devemos ter $V_{sai}/V_m \to 1$.

Questão 2

Uma película transparente de espessura $L = 4 \times 10^{-5}$ cm e com índice de refração $n = 1,5$ é iluminada por luz branca. A película está suspensa no vácuo. Considere incidência normal.

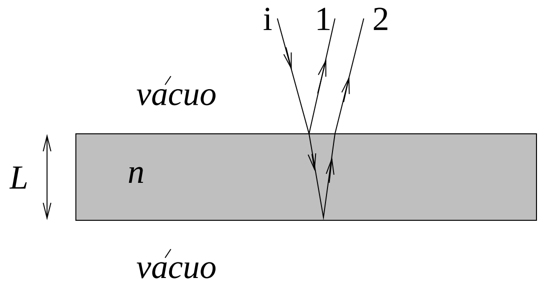
(a) (1,0 ponto) Para alguns comprimentos de onda a luz refletida poderá interferir construtivamente (máximo de intensidade). Deduza a equação que determina estes comprimentos de onda.

(b) (1,0 ponto) A luz visível tem comprimento de onda entre 400 nm e 700 nm. Qual é o comprimento de onda da luz visível que interferirá construtivamente?

(c) (0,5 ponto) Se L for muito pequeno nenhuma luz visível interferirá construtivamente. Determine o valor limite para L.

Solução da questão 2

(a) O raio incidente i se divide no raio refletido 1 e no raio refratado 2, conforme a figura.



Como o índice de refração da película é maior que o do vácuo, o raio 1 vai se defasar de π radianos, ou de meio comprimento de onda. Para haver interferência construtiva devemos ter

$$\frac{2L}{\lambda_{película}} - \frac{1}{2} = m \Leftrightarrow 2nL = (m + \frac{1}{2})\lambda,$$

onde $\lambda_{película} = \lambda/n$, λ é o comprimento de onda no vácuo e m é um inteiro.

(b) Do item (a) vem

$$\lambda = \frac{2nL}{m + 1/2} = \frac{4nL}{2m+1} = \frac{(4 \times 1,5)(4 \times 10^{-7})}{2m+1} = \frac{24 \times 10^{-7}}{2m+1}$$

$$\lambda_m \equiv \frac{24}{2m+1} \times 10^{-7}\ \text{m} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_0 = 24 \times 10^{-7}\ \text{m}$$

$$\lambda_1 = 8,0 \times 10^{-7}\ \text{m}$$

$$\boxed{\lambda_2 = 4,8 \times 10^{-7}\ \text{m} \Leftarrow \text{visível}}$$

$$\lambda_3 = 3,4 \times 10^{-7}\ \text{m}$$

$$\lambda_4 = 2,7 \times 10^{-7}\ \text{m}$$

(c) Note que quanto maior for m na expressão do item (b), <u>menor</u> será λ_m. Se L for suficientemente pequeno nem mesmo com $m = 0$ λ_m será maior que 400 nm. Assim, na condição limite devemos ter

$$\lambda_0 = \frac{2nL_{mín}}{1/2} \quad \text{com} \quad \lambda_0 = 400\ \text{nm} \Longrightarrow L_{mín} = \frac{\lambda_0}{4\,n} = \frac{400}{4 \times 1,5} = 66\ \text{nm}$$

$$\boxed{L_{mín} < 66\ \text{nm}}$$

Questão 3

Uma lâmpada incandescente de 100 W tem um filamento de tungstênio. A fração da potência irradiada pelo filamento relativamente a um corpo negro (emissividade) é $\varepsilon = 0,25$. Suponha que a emissividade seja independente da temperatura e do comprimento de onda da luz emitida.

(a) (1,0 ponto) Expresse a temperatura da lâmpada em termos da área total da superfície do filamento, A, e da constante de Stefan-Boltzmann.

(b) (1,0 ponto) Obtenha a expressão para o comprimento de onda para o qual a emitância espectral da lâmpada é máxima em termos de A e da constante de Stefan-Boltzmann.

(c) (0,5 ponto) Em uma lâmpada típica o filamento possui dimensões tais que o pico da emissão ocorre para o comprimento de onda $\lambda_m = 1400$ nm. Explique porque lâmpadas incandescentes não são fontes eficientes de luz visível. Suponha que o filamento tenha uma forma cilíndrica muito longa de modo que sua área total possa ser aproximada pela sua área lateral. Mantendo a potência da lâmpada constante (100 W) determine de quantas vezes o comprimento do filamento deve ser diminuído, mantendo seu diâmetro constante, de modo a ter $\lambda_m = 700$ nm.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 3}}$

(a) Como estamos supondo que a emissividade ε é independente da temperatura e do comprimento de onda, a potência total irradiada pelo filamento por unidade de área é dada pela lei de Stefan-Boltzmmann multiplicada por ε. Portanto, a potência total irradiada pelo filamento é

$$P = \varepsilon I A = \varepsilon \sigma T^4 \, A \, .$$

$$T = \left(\frac{P}{\varepsilon A \sigma}\right)^{1/4} = \left(\frac{400}{A\sigma}\right)^{1/4} = \frac{2\sqrt{5}}{(A\sigma)^{1/4}}.$$

(b) Novamente, se a emissividade ε é independente da temperatura e do comprimento de onda, o espectro de emissão do filamento é igual ao espectro de emissão do corpo negro multiplicado por ε. Portanto o comprimento de onda λ_m para o qual ocorre o máximo de emissão é igual ao do corpo negro na mesma temperatura.

$$\lambda_m = \frac{2.90 \times 10^{-3}}{T} = 2.90 \times 10^{-3} \frac{(A\sigma)^{1/4}}{2\sqrt{5}}.$$

(c) Se $\lambda_m = 1400$ nm a maior parte da radiação está na região do infravermelho e a lâmpada aquece mais do que ilumina.

Usando os resultados dos itens (a) e (b) podemos escrever

$$\left.\begin{aligned} \lambda_m &= \frac{2.90 \times 10^{-3}}{T} \\ T &= \left(\frac{P}{\varepsilon A \sigma}\right)^{1/4} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \lambda_m = 2.90 \times 10^{-3} \left(\frac{\varepsilon A \sigma}{P}\right)^{1/4}$$

Se o novo comprimento do cilindro for $l' = cl$, em que l é o comprimento original, usando $A = 2\pi r l$, teremos

$$\frac{\lambda'_m}{\lambda_m} = \frac{700}{1400} = \frac{1}{2} = \left(\frac{A'}{A}\right)^{1/4} = \frac{(cl)^{1/4}}{l^{1/4}} = c^{1/4} \Longrightarrow \boxed{c = \frac{1}{16}}.$$

Questão 4

A função de onda do elétron no átomo de hidrogênio, no estado 1s, é

$$\psi_{100}(r, \theta, \phi) = Ce^{-r/a_0},$$

onde a_0 é o raio de Bohr e C é uma constante real.

(a) (0,5 ponto) Neste estado, qual é o valor do módulo do momento angular orbital? Justifique.

(b) (1,0 ponto) Use a condição de normalização para determinar o valor de C.

(b) (1,0 ponto) Calcule a probabilidade de se encontrar o elétron a uma distância maior do que a_0.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 4}}$

(a) O momento angular orbital tem módulo $L = \hbar\sqrt{l(l+1)}$. Como o estado tem $l = 0$, então, $L = 0$.

(b) Usando o elemento de volume em coordenadas esféricas no caso em que o integrando não depende de θ e ϕ ($dV = 4\pi r^2 dr$) e integrando sobre todo espaço teremos

$$\int |\psi_{100}|^2 dV = 4\pi \int_0^\infty |\psi_{100}|^2 r^2 dr = 4\pi C^2 \int_0^\infty e^{-2r/a_0} r^2 dr = 1.$$

Utilizando a mudança de variável $x = 2r/a_0$, teremos (usando a integral dada no formulário)

$$4\pi C^2 \left(\frac{a_0}{2}\right)^3 \int_0^\infty e^{-x} x^2 dx = \frac{\pi a_0^3 C^2}{2} \left[e^{-x}\left(-x^2 - 2x - 2\right)\right]_0^\infty = \pi a_0^3 C^2 = 1$$

Logo,

$$C = \sqrt{\frac{1}{\pi a_0^3}}.$$

(c) A probabilidade é

$$P = \int_{a_0}^\infty |\psi_{100}|^2 dV = \frac{4}{a_0^3} \int_{a_0}^\infty e^{-2r/a_0} r^2 dr.$$

Utilizando novamente a mudança de variável $x = 2r/a_0$, teremos

$$P = \frac{1}{2} \int_2^\infty e^{-x} x^2 dx = \frac{1}{2} \left[e^{-x}\left(-x^2 - 2x - 2\right)\right]_2^\infty = \frac{1}{2} \left[e^{-2}(4 + 4 + 2)\right] = \frac{5}{e^2} \approx 0,68.$$

Formulário

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \quad X_L = \omega L, \quad X_C = \frac{1}{\omega C}, \quad \tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R},$$

$$V_m = Z I_m, \quad P_{med} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos\phi, \quad V_{qm} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}, \quad I_{qm} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad \frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2} \ .$$

$$\Delta p \, \Delta x \geq \hbar/2, \quad \Delta E \, \Delta t \geq \hbar/2, \quad \hbar = h/(2\pi).$$

$$I = \sigma T^4, \quad \lambda_m T = 2,90 \times 10^{-3} \ \mathrm{m \cdot K} \ , \quad I(\lambda) = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k T} - 1} \ .$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x), \quad \text{em coord. esféricas} \quad dV = r^2 \mathrm{sen}\theta \, dr d\theta d\phi \ .$$

$$\int e^{-x} dx = -e^{-x} \ ; \quad \int x e^{-x} dx = -(x+1)e^{-x} \ ; \quad \int x^2 e^{-x} dx = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x}.$$

$e^{-1} \approx 0,368$ e $e^{-2} \approx 0,135$.

$$L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar, \ L_z = m_\ell\,\hbar, \ S = \sqrt{s(s+1)}\,\hbar, \ S_z = m_s\,\hbar.$$