Física IV - 4320204

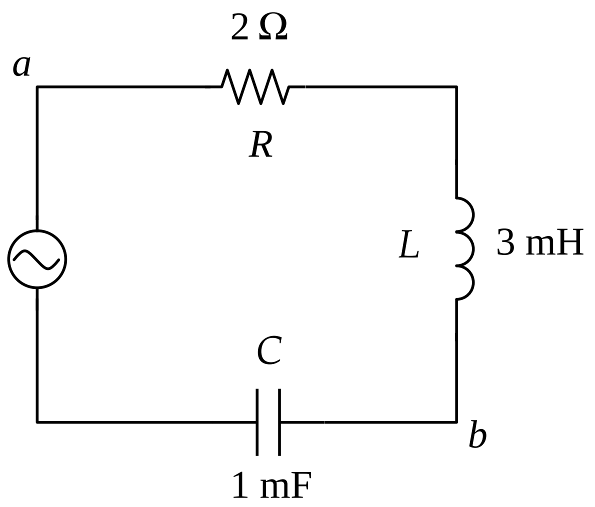
Escola Politécnica - 2012

GABARITO DA P1

28 de agosto de 2012

Questão 1

Considere o circuito RLC em série com um fonte de tensão alternada esquematizado na figura. A fonte fornece uma tensão que varia no tempo conforme a equação $v(t) = 10\sqrt{2}\cos(1000\,t)$ volts.



(a) (1,0 ponto) Obtenha a amplitude da corrente e a defasagem da corrente em relação à tensão da fonte. Escreva, então, a expressão que descreve a variação da corrente no circuito com o tempo.

(b) (0,5 ponto) Obtenha a amplitude da tensão na resistência e a amplitude da tensão no indutor. Qual é a defasagem da tensão no indutor em relação à tensão no resistor?

(c) (1,0 ponto) Um voltímetro mede a tensão eficaz (quadrática média). Qual seria a indicação de um voltímetro para a tensão entre os pontos a e b da figura?

$\boxed{\textbf{Solução da questão 1}}$

(a) As reatâncias indutiva e capacitiva e a impedância são dadas respectivamente por

$$X_L = \omega L = 3\ \Omega; \quad X_C = \frac{1}{\omega C} = 1\ \Omega; \quad Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\ \Omega.$$

A partir delas calculamos a corrente máxima e o ângulo de fase

$$I_m = \frac{V_m}{Z} = \frac{10\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 5\text{A}; \quad \tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} = 1 \Longrightarrow \phi = \frac{\pi}{4}.$$

O circuito é indutivo e a corrente $i(t)$ é

$$\boxed{i(t) = I_m \cos(\omega t - \phi) = 5\cos(1000t - \pi/4)}\,.$$

(b) As amplitudes da tensão no resistor e no capacitor são

$$\boxed{V_R = RI_m = 10\text{V}}\,, \quad \boxed{V_L = X_L I_m = 15\text{V}}\,.$$

A voltagem no indutor está adiantada de 90° em relação à corrente. Por outro lado, a corrente está em fase com a voltagem no resistor. Assim, $\boxed{\Delta\phi = 90^\circ}$.

(c) A amplitude da voltagem V_{ab} é

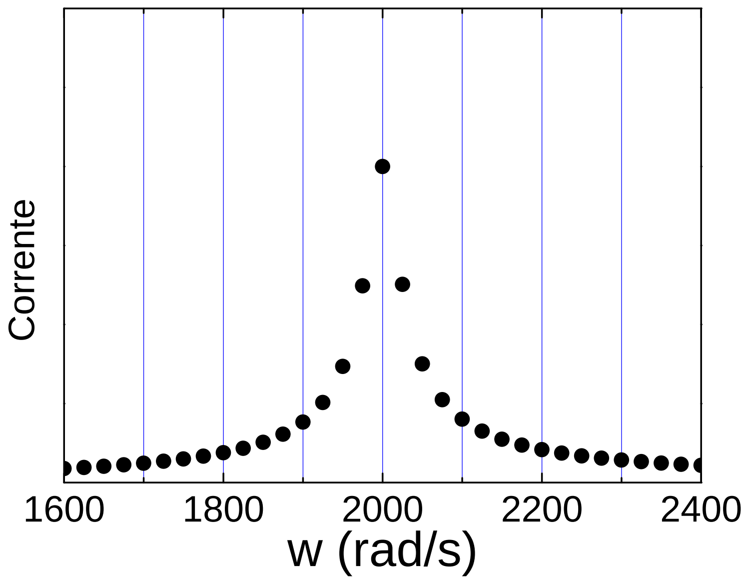
$$V_{ab} = I_m X_{ab} = I_m\sqrt{R^2 + X_L^2} = 5\sqrt{13} \approx 18\text{V}\ .$$

O voltímetro mede

$$\boxed{V_{qm} = \frac{V_{ab}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{13}}{\sqrt{2}} \approx 12,7\text{V}}\,.$$

Questão 2

Considere um circuito RLC em série com uma fonte de tensão alternada, com $R = 10\Omega$ e $C = 1\mu$F. A indutância do circuito é desconhecida. A fonte tem amplitude de tensão de 10 V e frequência que pode ser variada pelo operador. O operador varia a frequência da fonte e anota a amplitude de corrente obtida (esperando um tempo suficiente para desprezar a corrente transitória), obtendo a figura abaixo, na qual esse operador esqueceu de indicar a escala da corrente.



Baseado nestes resultados:

(a) (1,0 ponto) Calcule o valor da indutância do circuito.

(b) (0,5 ponto) Calcule o valor máximo da amplitude de corrente que foi medida pelo operador.

(c) (0,5 ponto) Qual é a impedância do circuito para $\omega = 4000$ rad/s?

Solução da questão 2

(a) Da figura obtemos a <u>frequência de ressonância</u> do circuito: $\boxed{\omega_0 = 2000 \text{ rad/s}}$. Mas,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Longrightarrow L = \frac{1}{\omega_0^2 C} = \frac{1}{2000^2 \times 10^{-6}} \Longrightarrow \boxed{L = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ H}}.$$

(b) O valor máximo da corrente é obtido na ressonância. Neste caso, a impedância Z do circuito é igual a R e

$$\boxed{I_m = \frac{V_m}{Z} = \frac{V_m}{R} = 1 \text{ A}}.$$

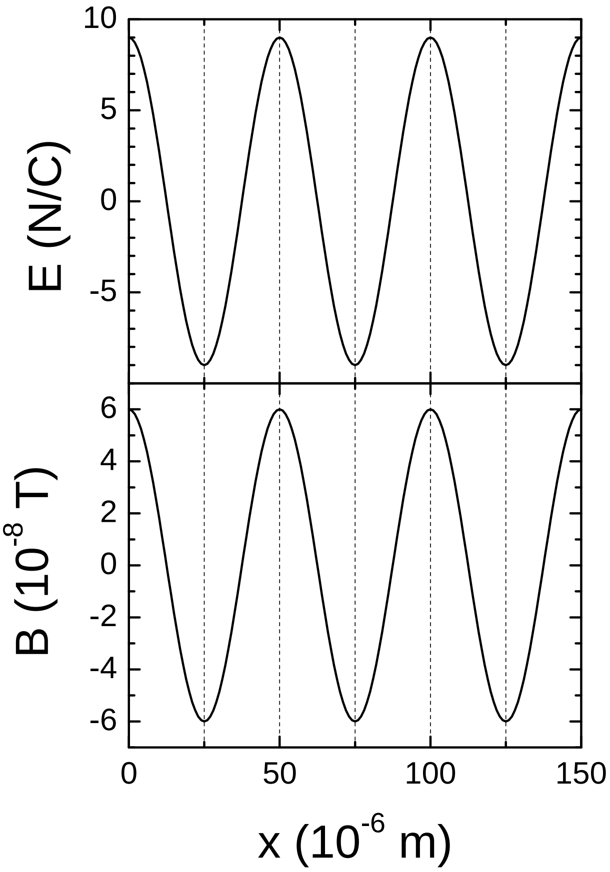
(c) A impedância do circuito é

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{10^2 + \left(4000 \times 0,25 - \frac{1}{4000 \times 10^{-6}}\right)^2} = \sqrt{10^2 + 750^2}$$

$$\boxed{Z \approx 750,07\ \Omega}$$

Questão 3

Uma onda eletromagnética plana e monocromática propaga-se num meio material com permeabilidade magnética igual a μ_0. No instante $t = 0$, os campos elétrico e magnético são descritos por $\vec{E} = E\vec{k}$ e $\vec{B} = B\vec{\jmath}$, onde E e B são funções de x apresentadas na figura abaixo. São dados: $c = 3 \times 10^8$ e $\epsilon_0 = 9 \times 10^{-12}$ C^2 / Nm^2.



(a) (0,5 ponto) Qual é a direção de propagação dessa onda? Justifique.

(b) (0,5 ponto) Quais são a velocidade dessa onda e o índice de refração do meio?

(c) (0,5 ponto) Qual é o valor da permissividade desse meio?

(d) (0,5 ponto) Qual é a frequência dessa onda?

(e) (0,5 ponto) Em relação a esta onda, qual é a média temporal da energia contida num volume correspondente a um metro cúbico?

Solução da questão 3

(a) Numa onda plana monocromática o campo elétrico, o campo magnético e a direção de propagação formam um triedro destrógiro. Assim, a onda se propaga na direção e sentido do versor $\boxed{-\vec{\imath} = \vec{k} \times \vec{\jmath}}$.

(b) A velocidade de propagação da onda v e o índice de refração n são dados por

$$\boxed{v = \frac{E}{B} = \frac{9}{6 \times 10^{-8}} = 1,5 \times 10^{8} \text{ m/s}} \, , \qquad \boxed{n = \frac{c}{v} = \frac{3 \times 10^{8}}{1,5 \times 10^{8}} = 2} \, .$$

(c) Lembrando que a velocidade de propagação da onda é dada por $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ obtemos

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} \Longrightarrow \boxed{\epsilon = n^2\epsilon_0 = 36 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ / Nm}^2} \, .$$

(d) Da figura obtemos $\lambda = 50 \times 10^{-6}$ m. Portanto,

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{1,5 \times 10^{8}}{50 \times 10^{-6}} \Longrightarrow \boxed{f = 3 \times 10^{12} \text{ Hz}} \, .$$

(e) A densidade média de energia é

$$< u >= \frac{\epsilon}{2} < E^2 > + \frac{1}{2\mu} < B^2 >= \frac{\epsilon}{4}E_m^2 + \frac{1}{4\mu}B_m^2 = \frac{\epsilon}{2}E_m^2 \, ,$$

onde usamos $B_m = E_m/v$ e $v^2 = 1/\mu\epsilon$. Portanto, a energia média U num volume $V = 1\text{m}^3$ é

$$U = \frac{\epsilon}{2}E_m^2 V = \frac{1}{2}(36 \times 10^{-12})9^2 \Longrightarrow \boxed{U \approx 1,5 \times 10^{-9} \text{ J}} \, .$$

Questão 4

Um onda eletromagnética propaga-se numa região do espaço delimitada por dois planos condutores paralelos com equações $y = 0$ e $y = a$. Nesta região, o campo elétrico da onda é

$$\vec{E} = E_x\,\hat{x} = E_0 \mathrm{sen}\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos(kz - \omega t)\,\hat{x} \quad \text{com} \quad 0 < y < a.$$

(a) (1,0 ponto) Determine a relação que deve haver entre a, k e ω para que o campo elétrico satisfaça a equação de ondas tridimensional.

(b) (1,0 ponto) A partir da forma diferencial da lei de Faraday determine o campo magnético associado ao campo elétrico dado.

(c) (1,0 ponto) Determine o vetor de Poynting no instante $t = 0$ em um ponto com coordenadas $x = 0$, $y = a/2$ e $z = 0$.

Formulário

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \quad X_L = \omega L, \quad X_C = \frac{1}{\omega C}, \quad \tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R}, \quad V_m = Z I_m,$$

$$P_{med} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos\phi, \quad V_{qm} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}, \quad I_{qm} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad \frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2}\ .$$

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{A}; \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla^2\vec{E} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}, \quad |\vec{E}| = c|\vec{B}|.$$

$$\vec{E} = E_m\cos(kx - \omega t + \phi)\hat{e}_y, \quad \vec{B} = B_m\cos(kx - \omega t + \phi)\hat{e}_z, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}. \quad k\,c = \omega.$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}, \quad S = uc, \quad u = u_e + u_m = \frac{\epsilon_0\,E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Num <u>meio dielétrico</u> valem as mesmas fórmulas com as substituições $\mu_0 \to \mu$, $\epsilon_0 \to \epsilon$ e $c \to v$; $n = c/v$.

Para um campo vetorial $\vec{R}(x,y,z,t) = R_x(x,y,z,t)\vec{\imath} + R_y(x,y,z,t)\vec{\jmath} + R_z(x,y,z,t)\vec{k}$ temos

$$\vec{\nabla}\times\vec{R} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix}; \qquad \nabla^2\vec{R} = \frac{\partial^2\vec{R}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{R}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{R}}{\partial z^2}\ .$$

$\boxed{\textbf{Solução da questão 4}}$

(a) Substituindo $\vec{E} = E_x\,\widehat{x}$ na equação de ondas tridimensional obtemos

$$\left[-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - k^2\right] E_x = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 E_x \Longrightarrow \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 .$$

(b) Com $\vec{E} = E_x\,\vec{\imath}$, temos da lei de Faraday

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = -\frac{\partial E_x}{\partial z} = E_0 k \text{sen}\left(\frac{\pi y}{a}\right) \text{sen}(kz - \omega t)$$
$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = +\frac{\partial E_x}{\partial y} = E_0 \left(\frac{\pi}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos(kz - \omega t).$$

Integrando em t,

$$B_y = E_0 \left(\frac{k}{\omega}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos(kz - \omega t)$$
$$B_z = -E_0 \left(\frac{\pi}{a\omega}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \text{sen}(kz - \omega t).$$

Logo,

$$\vec{B} = \left(\frac{E_0}{\omega}\right) \left[k\,\text{sen}\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos(kz - \omega t)\,\widehat{y} - \left(\frac{\pi}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \text{sen}(kz - \omega t)\,\widehat{z}\right]$$

(c) Como $\vec{E} = E_x\,\widehat{x}$ e $\vec{B} = B_y\,\widehat{y} + B_z\,\widehat{z}$, o vetor de Poynting fica

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0}(-E_x B_z\,\widehat{y} + E_x B_y\,\widehat{z})$$

Em $t = 0$ no ponto P com coordenadas $(0, a/2, 0)$ temos

$$\vec{S}_P = \frac{1}{\mu_0} E_x B_y\,\widehat{z} = \frac{E_0^2\,k}{\mu_0\,\omega}\,\widehat{z}\,.$$