Física IV - 4320402

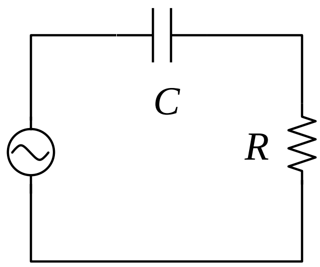
Escola Politécnica - 2012

GABARITO DA PR

5 de fevereiro de 2013

Questão 1

No circuito abaixo o gerador de corrente alternada com freqüência angular $\omega = 500$ rd/s fornece uma tensão eficaz (quadrática média) $V = 50$ V e potência média $P = 60$ W. A corrente eficaz no circuito $I = 2$ A.



(a) (1,0 ponto) Determine a resistência R e a tensão eficaz V_R no resistor.

(b) (1,0 ponto) Desenhe o diagrama de fasores para o circuito indicando a corrente eficaz e as tensões eficazes no resistor, no capacitor e no gerador. Determine a tensão eficaz V_C no capacitor e a capacitância C.

(c) (0,5 pontos) Determine a impedância (em módulo) e o fator de potência da associação RC em série.

Solução da questão 1

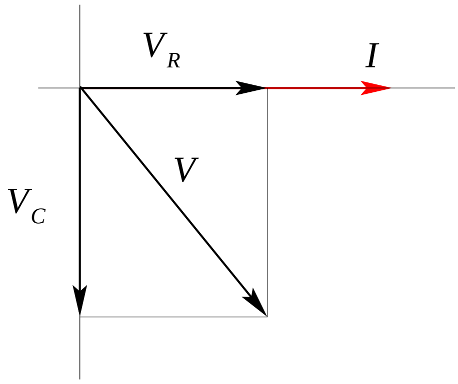
(a) Resistência

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{60}{4} = 15\ \Omega.$$

Voltagem eficaz no resistor

$$V_R = RI = (15)(2) = 30\ \text{V}.$$

(b) Diagrama de fasores



Tensão eficaz no capacitor

$$V_C = \sqrt{V^2 - V_R^2} = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40\ \text{V}.$$

Reatância capacitiva

$$X_C = \frac{V_C}{I} = \frac{40}{2} = 20\ \Omega.$$

Capacitância

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{(500)(20)} = 10^{-4}\ \text{F}.$$

(c) Módulo da impedância da associação RC

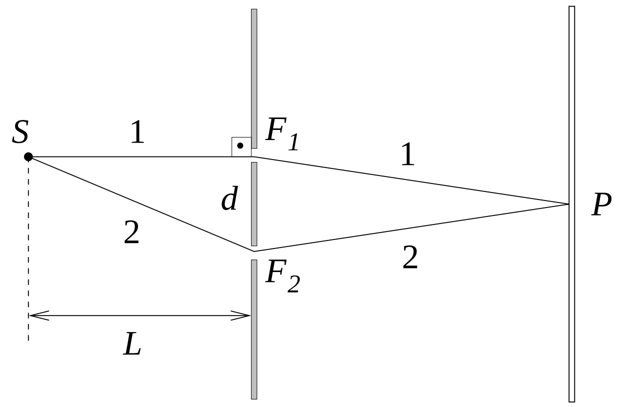
$$Z = \frac{V}{I} = \frac{50}{2} = 25\ \Omega.$$

Fator de potência da associação RC

$$\cos\phi = \frac{P}{VI} = \frac{60}{(50)(2)} = 0,6.$$

Questão 2

Luz de comprimento de onda λ, emitida por uma fonte puntiforme S, atinge um anteparo contendo uma dupla fenda, a uma distância L, com a fenda superior F_1 diretamente adiante da fonte, e a fenda inferior F_2 a uma distância d abaixo, como mostrado na figura. O ponto P, sobre o qual a intensidade luminosa é analisada, é equidistante das fendas F_1 e F_2.



(a) (1,0 ponto) Seja Δr a diferença de caminho entre as ondas 1 e 2. Escreva em termos de λ (comprimento de onda da luz incidente) os valores de Δr que produzem sobre o ponto P uma interferência destrutiva.

(b) (0,5 ponto) Calcule, em termos da distância L entre a fonte e o anteparo, e da separação d entre as fendas, a diferença de caminho exato Δr entre as ondas 1 e 2.

(c) (1,0 ponto) Para $\lambda = 490\,\text{nm}$ e $L = 1\,\text{m}$ qual é o mínimo valor de d para que sobre o ponto P haja uma interferência destrutiva? Sugestão: faça uma aproximação usando o fato de que λ é muito menor que L.

Solução da questão 2

(a) Para que haja interferência destrutiva da luz emitida pelas duas fendas a diferença de caminho Δr tem que corresponder a um múltiplo semi-inteiro de um comprimento de onda. Assim, os valores para Δr são

$$\Delta r = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

(b) A diferença de caminho corresponde à diferença entre a hipotenusa e o maior cateto do triângulo formado pela fonte e as duas fendas. Portanto,

$$\Delta r = \sqrt{L^2 + d^2} - L.$$

(c) O menor valor de d corresponde ao menor valor da diferença de caminho. Assim,

$$\sqrt{L^2 + d^2} - L = \frac{1}{2}\lambda \quad \Rightarrow \quad \sqrt{L^2 + d^2} = L + \frac{1}{2}\lambda,$$

$$L^2 + d^2 = L^2 + \lambda L + \frac{1}{4}\lambda^2 \quad \Rightarrow \quad d^2 = \lambda L + \frac{1}{4}\lambda^2$$

e desprezando o termo em λ^2 frente ao termo em λL chegamos a

$$d = \sqrt{\lambda L} = \sqrt{490 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}^2} = 7 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}.$$

Questão 3

Um feixe de luz com comprimento de onda de 480 nm no vácuo e de intensidade de 10 W/m^2 incide sobre um catodo de 1 cm^2 de área no interior de uma célula fotoelétrica. A função de trabalho do metal é de 2,2 eV. As respostas devem ser dadas com dois algarismos significativos.

(a) (0,5 ponto) Calcule a energia dos fótons incidentes em joules e em elétron-volts.

(b) (0,5 ponto) Calcule o número de fótons por segundo incidente na placa metálica.

(c) (1,0 ponto) Se a eficiência da conversão fotoelétrica é de 20% (apenas 20% dos fótons arrancam elétrons do metal), calcule a corrente elétrica máxima através da célula quando uma ddp é aplicada entre o catodo e o anodo.

(d) (0,5 ponto) Calcule o comprimento de onda máximo dos fótons incidentes acima do qual não ocorre o efeito fotoelétrico.

Dados: $h = 6,6 \times 10^{-34}$ J·s $= 4,1 \times 10^{-15}$ eV·s, $c = 3,0 \times 10^{8}$ m/s, 1 eV $= 1,6 \times 10^{-19}$J e 1 nm $= 10^{-9}$ m, carga do elétron $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C.

Solução da questão 3

(a) A energia do fóton é dada por

$$E_f = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6,6 \times 10^{-34})(3 \times 10^8)}{480 \times 10^{-9}} \approx 4,1 \times 10^{-19} J$$

$$\Longrightarrow \quad E_f = \frac{4,1 \times 10^{-19}}{1.6 \times 10^{-19}} \approx 2,6 \; eV$$

(b) O número de fótons por segundo é

$$\frac{N_f}{\text{seg}} = \frac{\text{área} \times I}{E_f} = \frac{10^{-4} \times 10}{4,1 \times 10^{-19}} \approx 2,4 \times 10^{15}.$$

(c) Como $E_f > \phi$, haverá emissão fotoelétrica e a corrente será

$$i = \text{eficiência} \times \frac{N_f}{\text{seg}} \times e = 0,2 \times (2,4 \times 10^{15}) \times (1,6 \times 10^{-19}) \approx 7,6 \times 10^{-5}\text{A}.$$

(d) No limiar do efeito fotoelétrico a energia do fóton incidente é igual à função de trabalho ϕ do material.

$$E_f = \frac{hc}{\lambda} = \phi \Longrightarrow \lambda = \frac{hc}{\phi} = \frac{(4,1 \times 10^{-15})(3 \times 10^8)}{2,2} = 5,6 \times 10^{-7} \text{ m}.$$

Questão 4

Uma partícula de massa m executa oscilações harmônicas, em uma dimensão, num potencial $U(x) = m\omega^2 x^2/2$. A função de onda da partícula no estado fundamental, com energia $E = \hbar\omega/2$, é dada por $\psi(x) = Ae^{-bx^2}$, onde A é uma constante e $b = m\omega/(2\hbar)$.

(a) (1,0 ponto) Calcule a constante de normalização A.

(b) (0,5 ponto) Classicamente, a partícula oscilaria dentro do intervalo simétrico $[-x_{máx}, x_{máx}]$. Calcule $x_{máx}$ usando a mecânica clássica.

(c) (1,0 ponto) Calcule, usando a mecânica quântica, a probabilidade de encontrar a partícula no intervalo $[-x_{máx}, x_{máx}]$. Como este resultado se compara com o da mecânica clássica?

Solução da questão 4

(a) A constante A é determinada impondo-se $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2\, dx = 1$

$$\Longrightarrow A^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2bx^2} dx = 1 \Longrightarrow A^2 \sqrt{\frac{\pi}{2b}} = 1$$

$$\boxed{A = \left(\frac{2b}{\pi}\right)^{1/4} = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}}.$$

(b) Classicamente, nos pontos $\pm x_{máx}$ toda a energia é potencial:

$$\frac{1}{2} m\omega^2 x_{máx}^2 = \frac{1}{2}\hbar\omega \Longrightarrow \boxed{x_{máx} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}}.$$

(c) A probabilidade quântica P de encontrar a partícula no intervalo $[-x_{máx}, x_{máx}]$ é

$$\begin{aligned} P &= \int_{-x_{máx}}^{x_{máx}} |\psi(x)|^2 dx = \int_{-x_{máx}}^{x_{máx}} A^2 e^{-2bx^2} dx = 2 \int_{0}^{x_{máx}} A^2 e^{-2bx^2} dx \\ &= 2 \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \int_{0}^{\sqrt{\hbar/m\omega}} e^{-m\omega x^2/\hbar} dx. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} x = t$ obtemos

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{1} e^{-t^2} dt = erf(1) \approx 0,84,$$

Em contraste com o que ocorre na mecânica clássica, existe uma probabilidade de 0,16 de encontrar a partícula fora do intervalo $[-x_{máx}, x_{máx}]$.

Formulário

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \quad X_L = \omega L, \quad X_C = \frac{1}{\omega C}, \quad \tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R},$$

$$V_m = Z I_m, \quad P_{med} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos\phi = \frac{1}{2} R I_m^2, \quad V_{qm} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}, \quad I_{qm} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

$$E = hf = hc/\lambda, \quad E = pc, \quad E_{cin} = hf - \Phi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x); \quad \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha t^2)dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp(-t^2)dt = \mathrm{erf}(x); \quad \mathrm{erf}(1/2) = 0,52; \quad \mathrm{erf}(1) = 0,84; \quad \mathrm{erf}(2) = 0,99.$$