Física IV - 4320402

Escola Politécnica - 2012

GABARITO DA PS

4 de dezembro de 2012

Questão 1

Na região do espaço $-a/2 < z < a/2$ limitada por superfícies condutoras em $z = -a/2$ e $z = a/2$ há uma onda eletromagnética no vácuo com um campo elétrico dado por

$$\vec{E} = E(z,t)\hat{\imath} = [E_0 \cos(kz - \omega t) + E_0 \cos(-kz - \omega t)]\hat{\imath} = 2E_0 \cos(kz)\cos(\omega t)\hat{\imath}.$$

(a) (1,0 ponto) Calcule o campo magnético $\vec{B}$.

(b) (0,5 ponto) Calcule o vetor de Poynting.

(c) (1,0 ponto) Use as equações de Maxwell apropriadas para calcular a densidade de carga e a densidade de corrente na região $-a/2 < z < a/2$.

Solução da questão 1

(a) Note que $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, onde $\vec{E}_1 = E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{\imath}$ e $\vec{E}_2 = E_0 \cos(-kz - \omega t)\hat{\imath}$, são ondas planas com $\vec{k}_1 = k\hat{k}$ e $\vec{k}_2 = -k\hat{k}$. Assim,

$$\vec{B}_1 = \frac{1}{c}\hat{k} \times \vec{E}_1 = \frac{E_0}{c}\cos(kz - \omega t)\hat{\jmath}; \qquad \vec{B}_2 = \frac{1}{c}(-\hat{k}) \times \vec{E}_2 = -\frac{E_0}{c}\cos(-kz - \omega t)\hat{\jmath}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{E_0}{c}(\cos(kz - \omega t) - \cos(-kz - \omega t))\hat{\jmath}$$

$$\boxed{\vec{B} = 2\frac{E_0}{c}\text{sen}(kz)\text{sen}(\omega t)\hat{\jmath}}$$

(b) Vetor de Poynting $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}/\mu_0$

$$\vec{S} = \frac{EB}{\mu_0}\hat{k} = \frac{4E_0^2}{\mu_0\, c}\cos(kz)\text{sen}(kz)\cos(\omega t)\text{sen}(\omega t)\hat{k} \Longrightarrow \boxed{\vec{S} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\text{sen}(2kz)\text{sen}(2\omega t)\hat{k}}$$

(c) A lei de Gauss $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ permite calcular a densidade de carga ρ:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E(z,t)}{\partial x} = 0 \Longrightarrow \boxed{\rho = 0}$$

A lei de Ampère-Maxwell com o termo de corrente de deslocamento $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0\epsilon_0 \partial\vec{E}/\partial t$ permite calcular a densidade de corrente $\vec{J}$.

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & B(z,t) & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial B(z,t)}{\partial z}\hat{\imath} = -2\frac{k}{c}E_0\cos(kz)\text{sen}(\omega t)\hat{\imath}.$$

$$\mu_0\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -2\mu_0\epsilon_0\omega E_0\cos(kz)\,\text{sen}\,(\omega t)\hat{\imath} = -2\frac{k}{c}E_0\cos(kz)\text{sen}(\omega t)\hat{\imath},$$

onde usamos $\mu_0\epsilon_0\omega = \omega/c^2 = k/c$. Substituindo na lei de Ampère-Maxwell obtemos

$$\boxed{\vec{J} = \vec{0}}$$

Questão 2

Luz monocromática plana de comprimento de onda λ incide sobre duas fendas separadas por uma distância d, conforme a figura 1. A distância do ponto P às fendas é muito maior do que a separação d.

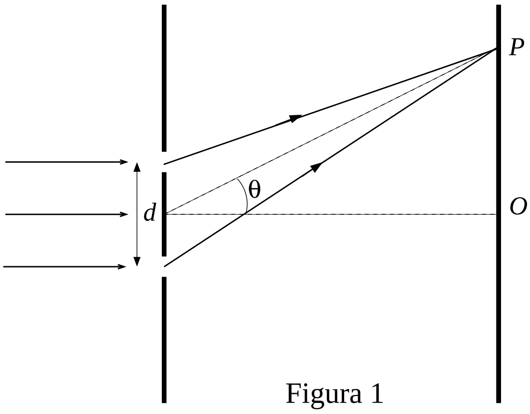


Figura 1

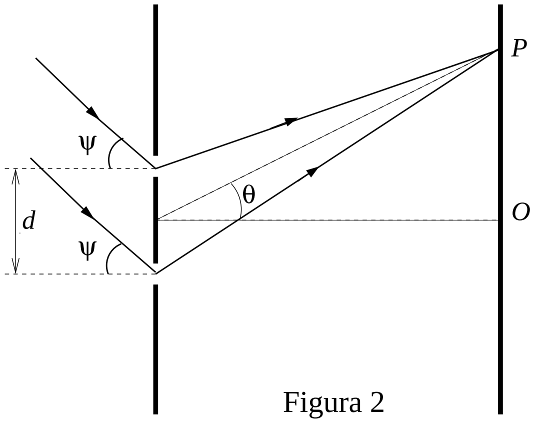


Figura 2

(a) (1,0 ponto) Para uma incidência normal (figura 1), deduza a condição para os máximos de intensidade em termos de d, λ e θ .

(b) (0,5 ponto) Para incidência normal calcular o valor de d/λ para que o ponto do anteparo localizado em $\theta = 30^o$ corresponda ao máximo de ordem $m = 10$.

(c) (1,0 ponto) Para uma incidência oblíqua com ângulo de incidência ψ (figura 2), deduza a condição para os máximos de intensidade em termos de d, λ, θ e ψ.

Solução da questão 2

(a) A diferença de caminho entre os dois raios adjacentes é $d\,\text{sen}\,\theta$ de modo que a condição para haver interferência construtiva é

$$\boxed{d\,\text{sen}\,\theta = m\lambda \quad \text{com} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, ...}$$

(b) Usando a fórmula calculada no item (a) obtemos

$$d/2 = 10\lambda \Rightarrow \boxed{d/\lambda = 20}$$

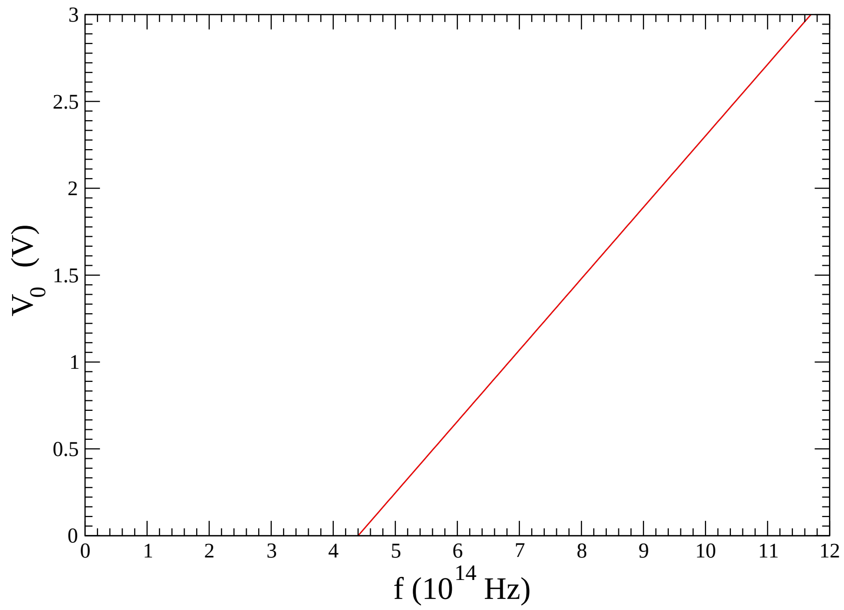
(c) A diferença de caminho entre dois raios adjacentes é $d(\,\text{sen}\,\psi + \,\text{sen}\,\theta)$ de modo que a condição para haver interferência construtiva é

$$\boxed{d(\,\text{sen}\,\psi + \,\text{sen}\,\theta) = m\lambda \quad \text{com} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, ...}$$

Questão 3

No efeito fotoelétrico, elétrons são arrancados de um material pela luz incidente sobre sua superfície. A energia cinética máxima desses elétrons, K_{max}, pode ser determinada freiando-os através de uma diferença de potencial V_0.

O gráfico abaixo representa V_0 em função da frequência da luz incidente (medida em unidades de 10^{14} Hz), para o sódio.



(a) (0,5 ponto) Deduza a fórmula para K_{max} em termos de V_0 e da carga do elétron e.

(b) (1,0 ponto) Qual é o valor mínimo da energia dos fótons que conseguem arrancar elétrons do sódio?

(c) (1,0 ponto) Qual é o valor da função trabalho do sódio?

<u>Dado:</u> $h = 4,1 \times 10^{-15}$ eV$\cdot$ s.

Solução da questão 3

(a) Pela conservação de energia

$$\boxed{K_{max} = eV_0}.$$

(b) O valor mínimo para ter o efeito fotoelétrico é $f = 4,4 \times 10^{14}$ Hz. Isto corresponde a fótons de energia $\boxed{hf = 1,8 \text{ eV}}$.

(c) Quando f tem seu valor mínimo, os elétrons tem energia cinética máxima nula de modo que a função trabalho vale $\boxed{\phi = hf = 1,8 \text{ eV}}$.

Questão 4

Uma partícula de massa m está sujeita a uma energia potencial que é nula entre $x = -a$ e $x = a$ e infinita fora deste intervalo. A partícula se encontra em um estado estacionário descrito pela função de onda

$$\psi(x) = \begin{cases} A\cos\left(\dfrac{\pi x}{2a}\right) & \text{para} - a \leq x \leq a \\ 0 \quad \text{para} \quad x < -a \quad \text{ou} \quad x > a. \end{cases}$$

(a) (1,0 ponto) Usando a condição de normalização da função de onda, determine a constante A. Qual é a probabilidade de achar a partícula no intervalo $[0, a]$?

(b) (1,0 ponto) Calcule a energia da partícula partindo do fato de que $\psi(x)$ satisfaz a equação de Schrödinger independente do tempo.

(c) (0,5 ponto) Usando apenas o fato de que a função de onda da partícula se anula para $|x| > a$, o que se pode afirmar sobre a incerteza na posição Δx? A partir deste resultado o que se pode afirmar sobre a incerteza no momento Δp_x?

Solução da questão 4

(a) A normalização da função de onda fornece

$$1 = \int_{-a}^{a} |\psi|^2 dx = A^2 \int_{-a}^{a} \cos^2\left(\frac{\pi x}{2a}\right) dx = A^2 a \Longrightarrow \boxed{A = \sqrt{\frac{1}{a}}}.$$

Pela simetria do problema a probabilidade de encontrar a partícula na região $0 \leq x \leq a$ é igual a 1/2.

(b) Substituindo $\psi = A\cos(\pi x/2a)$ na equação de Schrödinger com $U = 0$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x),$$

obtemos

$$\frac{\hbar^2}{2m} A \frac{\pi^2}{4a^2} \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) = EA\cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \Longrightarrow \boxed{E = \frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2}}.$$

(c) A incerteza máxima na posição da partícula é $\boxed{\Delta x = 2a}$ (a partícula está com certeza na região $-a < x < a$).

A incerteza no momento Δp_x pode ser estimada usando-se o princípio de incerteza de Heisenberg que afirma que $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$. Assim,

$$\boxed{\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2\Delta x} \geq \frac{\hbar}{4a}}.$$

Solução alternativa: Uma estimativa mais cuidadosa de Δx é a seguinte:

$$(\Delta x)^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 \leq \overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2|\psi(x)|^2 dx \leq \int_{-a}^{a} a^2|\psi(x)|^2 dx \leq a^2,$$

onde a barra denota o valor médio. Portanto, $\Delta x \leq a$ e a incerteza no momento é

$$\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2\Delta x} \geq \frac{\hbar}{2a}$$

Formulário

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}; \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0; \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0; \quad \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{A};$$

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{A}; \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}; \quad \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0\epsilon_0\frac{d}{dt}\int_S \vec{E}\cdot d\vec{A};$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}; \quad \nabla^2\vec{E} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}; \quad \nabla^2\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}; \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}; \quad |\vec{E}| = c|\vec{B}|$$

$$\vec{E} = E_m\cos(kx-\omega t+\phi)\hat{\jmath}; \quad \vec{B} = B_m\cos(kx-\omega t+\phi)\hat{k}; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad \omega = \frac{2\pi}{T}; \quad k\,c = \omega;$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}; \quad S = uc; \quad u = u_e + u_m = \frac{\epsilon_0\,E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}; \quad \int\cos^2(x)dx = \frac{x}{2} + \frac{\text{sen}\,(2x)}{4}$$

$$E_f = hf = hc/\lambda; \quad E_{cin}^{max} = hf - \phi; \quad \Delta x\Delta p_x \geq \hbar/2 \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x).$$

Para um campo vetorial $\quad \vec{R}(x,y,z,t) = R_x(x,y,z,t)\vec{\imath} + R_y(x,y,z,t)\vec{\jmath} + R_z(x,y,z,t)\vec{k}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{R} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix}; \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{R} = \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z}; \quad \nabla^2\vec{R} = \frac{\partial^2\vec{R}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{R}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{R}}{\partial z^2}.$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right); \quad \cos A - \cos B = 2\,\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right).$$