Física IV - 4320402

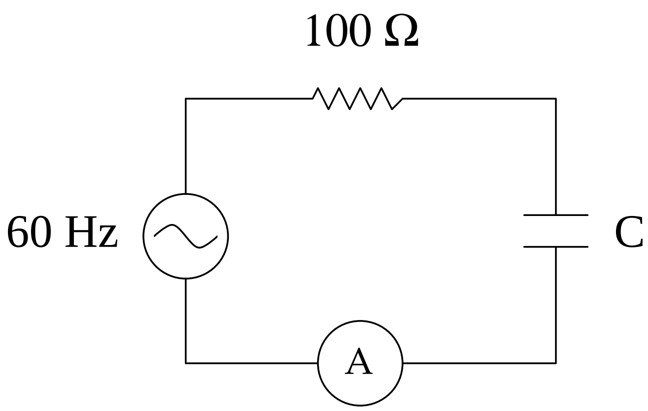
Escola Politécnica - 2013

GABARITO DA P1

10 de setembro de 2013

Questão 1

O circuito da figura é usado para determinar a capacitância do capacitor. O resistor tem resistência de 100 Ω e a fonte de tensão é um gerador de CA com frequência de 60 Hz e tensão eficaz de 500 V. A leitura do amperímetro (A) que mede o valor eficaz da corrente é 3 A.



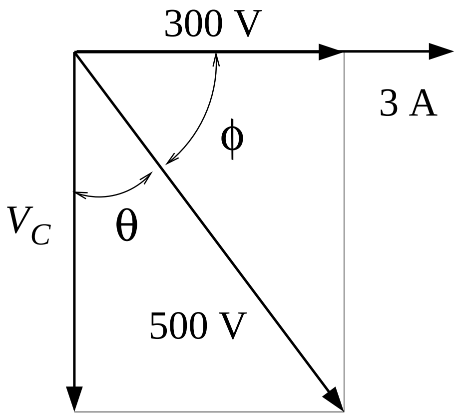
(a) (1,0 ponto) Faça um diagrama indicando claramente os fasores da corrente e das tensões no gerador, resistor e capacitor. Determine a capacitância do capacitor.

(b) (0,5 pontos) Calcule a potência média consumida pelo circuito e o fator de potência.

(c) (1,0 ponto) Admitindo-se que para $t = 0$ tem-se um pico de tensão no gerador, determine a tensão instantânea no capacitor.

Solução da questão 1

(a) No diagrama de fasores indicamos valores eficazes e adotamos fase nula para a corrente. A tensão eficaz no capacitor é



$$V_C = \sqrt{500^2 - 300^2} = 400 \text{ V}.$$

Reatância capacitiva

$$X_C = \frac{V_C}{I} = \frac{400}{3}\ \Omega.$$

Capacitância

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{2\pi(60)(400/3)} = \frac{125}{2\pi}\ \mu\text{F} \approx 19,89\ \mu\text{F}$$

(b) Potência média consumida

$$P = RI^2 = (100)(3^2) = 900 \ \ \text{W}$$

Fator de potência

$$\cos\phi = \frac{P}{VI} = \frac{900}{(500)(3)} = 0{,}6$$

(c) A tensão no capacitor está atrasada em relação à tensão aplicada de

$$\theta = \arccos 0,8 \approx 36,87^\circ.$$

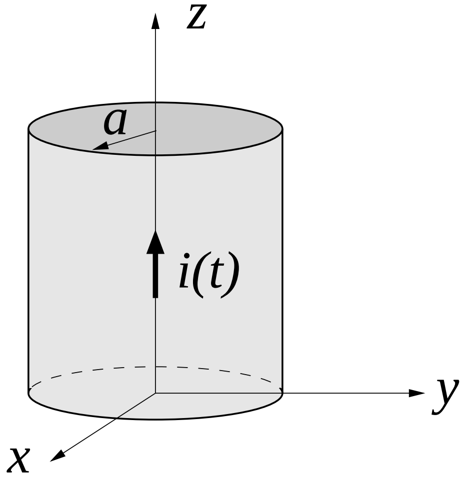
Logo,

$$v_C(t) = 400\sqrt{2}\cos(120\pi t - \arccos 0,8)\ \text{(V)}.$$

onde t é em segundos.

Questão 2

Um resistor cilíndrico muito longo de raio a é feito de um material de condutividade σ e permissividade dielétrica ϵ_0 igual ao do vácuo. Uma voltagem variável é aplicada de tal modo que a corrente através do resistor é dada por $i(t) = I\cos\omega t$ no sentido do eixo z, conforme a figura.



(a) (0,5 ponto) Determine o vetor densidade de corrente elétrica $\vec{J}_C$ devido às cargas, supondo que seja uniforme no interior do resistor.

(b) (0,5 ponto) Determine o vetor campo elétrico $\vec{E}$ usando a lei de Ohm.

(c) (0,5 ponto) Determine o vetor densidade de corrente de deslocamento $\vec{J}_D$.

(d) (1,0 ponto) Use a lei de Ampère-Maxwell para determinar o vetor campo magnético $\vec{B}$ no interior do resistor a uma distância r do seu eixo.

Solução da questão 2

(a) Densidade de corrente de condução

$$\vec{J}_C = \frac{i}{\pi a^2}\,\widehat{k} = \boxed{\left(\frac{I}{\pi a^2}\right)\cos\omega t\,\widehat{k}}$$

(b) Campo elétrico

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}_C}{\sigma} = \boxed{\left(\frac{I}{\sigma\pi a^2}\right)\cos\omega t\,\widehat{k}}$$

(c) Densidade de corrente de deslocamento

$$\vec{J}_D = \epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \boxed{-\left(\frac{\epsilon_0 I\omega}{\sigma\pi a^2}\right)\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\widehat{k}}$$

(d) Aplicando a lei de Ampère-Maxwell a um círculo amperiano C de raio r, e usando a simetria cilíndrica do sistema temos

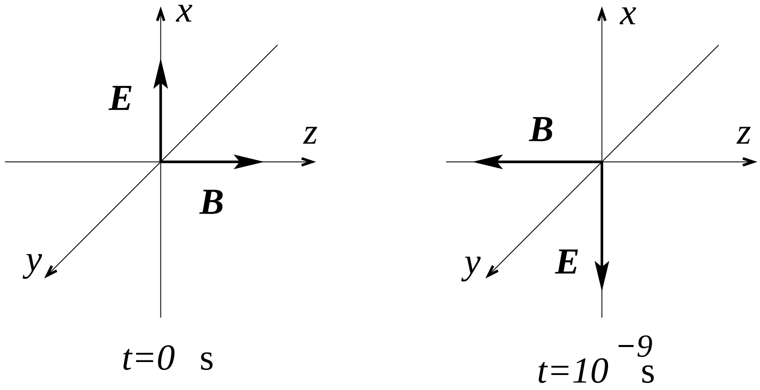
$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = B_\phi(2\pi r) = \mu_0\int_S(\vec{J}_C+\vec{J}_D)\cdot d\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{\pi a^2}\left(\cos\omega t - \frac{\omega\epsilon_0}{\sigma}\,\mathrm{sen}\,\omega t\right)(\pi r^2),$$

onde escolhemos a normal $\vec{n} = \widehat{k}$. Portanto,

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}\left(\cos\omega t - \frac{\omega\epsilon_0}{\sigma}\,\mathrm{sen}\,\omega t\right)\widehat{\phi}}\,.$$

Questão 3

A figura abaixo representa os campos elétrico $\vec{E}$ e magnético $\vec{B}$ de uma onda eletromagnética plana monocromática, no vácuo, na origem do sistema de coordenadas em dois instantes diferentes. Nestes dois instantes $|\vec{E}| = 1/\sqrt{2}$ V/m. A frequência da onda é $f = 0,25 \times 10^9$ Hz e sua velocidade de propagação $c = 3 \times 10^8$ m/s.



(a) (1,0 ponto) Determine o sentido de propagação da onda. Calcule o comprimento de onda λ, a frequência angular ω e o número de onda k.

(b) (1,0 ponto) Escreva a expressão completa do vetor campo elétrico indicando a dependência nas coordenadas e no tempo.

(c) (0,5 ponto) Escreva a expressão do vetor campo magnético $\vec{B}$ associado ao campo elétrico dado.

Solução da questão 3

(a) Direção e sentido de propagação da onda. $\vec{E}$ e $\vec{B}$ formam um triedro destrógiro. Portanto, a direção e o sentido de propagação coincidem com $\boxed{-\hat{\jmath}}$.

Comprimento de onda

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{0,25 \times 10^9 \text{ Hz}} \longrightarrow \boxed{\lambda = 1,2 \text{ m}}.$$

Freqüência angular

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(0,25 \times 10^9 \text{ Hz}) \longrightarrow \boxed{\omega = 5\pi \times 10^8 \text{ rd/s}}.$$

Número de onda

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{5\pi}{3} \text{ m}^{-1}}.$$

(b) O campo elétrico tem a forma

$$\vec{E}(y,t) = E_m \cos(ky + \omega t + \phi)\,\hat{\imath}.$$

São dados

$$E_x(0,0) = E_m \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ V/m},$$
$$E_x(0, 10^{-9} \text{ s}) = E_m \cos(\pi/2 + \phi) = -E_m \operatorname{sen}\phi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ V/m}.$$
$$\Longrightarrow \tan(\phi) = 1 \Longrightarrow \boxed{\phi = \pi/4}, \quad \boxed{E_m = 1 \text{ V/m}},$$
$$\text{e} \quad \boxed{\vec{E}(y,t) = 1 \cos\left[5\pi\left(\frac{y}{3} + 10^8 t + \frac{1}{20}\right)\right]\hat{\imath} \qquad \text{(V/m)}}.$$

(c) Campo magnético

$$\boxed{\vec{B} = \frac{(-\hat{\jmath}) \times \vec{E}}{c} = \left(\frac{1}{3} \times 10^{-8}\right) \cos\left[5\pi\left(\frac{y}{3} + 10^8 t + \frac{1}{20}\right)\right]\hat{k} \qquad \text{(T)}}.$$

Questão 4

Um laser de intensidade I produz um feixe de radiação monocromático, cilíndrico e com seção reta de raio R. O feixe incide perpendicularmente sobre uma placa que o absorve totalmente.

(a) (0,5 ponto) Calcule a potência média emitida pelo laser.

(b) (0,5 ponto) Calcule a amplitude do campo elétrico e do campo magnético do feixe incidente.

(c) (1,0 ponto) Calcule a força exercida pela radiação sobre a placa.

(d) (0,5 ponto) Calcule a densidade volumétrica média de energia do feixe.

Solução da questão 4

(a) A potência está relacionada com a integral do vetor de Poynting.

$$P = \int_{\text{seção}} \vec{S} \cdot d\vec{A} = SA \Longrightarrow < P >=< S > A \Leftrightarrow \boxed{< P >= I\pi R^2}.$$

(b) O módulo do vetor de Poynting de uma onda eletromagnética monocromática é

$$S = \frac{E\,B}{\mu_0} \Longrightarrow I =< S >= \frac{E_m\,B_m}{2\mu_0} = \frac{E_m^2}{2\mu_0 c} = \frac{cB_m^2}{2\mu_0},$$

onde usamos a relação $E_m = cB_m$. Portanto,

$$\boxed{E_m = \sqrt{2\mu_0 c I}, \quad B_m = \sqrt{\frac{2\mu_0 I}{c}}}.$$

(c) A força sobre a placa é

$$F = P_{\text{rad}}\pi R^2 = \frac{< S >}{c}\pi R^2 \Longrightarrow \boxed{F = \frac{I}{c}\pi R^2}.$$

(d) A densidade de energia do feixe é

$$\boxed{u_{\text{med}} = \frac{< S >}{c} = \frac{I}{c}}.$$

Formulário

$$Z=\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2},\quad X_L=\omega L,\quad X_C=\frac{1}{\omega C},\quad \tan\phi=\frac{X_L-X_C}{R},\quad V_m=ZI_m,$$

$$P_{med}=\frac{1}{2}V_mI_m\cos\phi,\quad \frac{V_1}{N_1}=\frac{V_2}{N_2},\quad \oint\vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{q_{int}}{\epsilon_0},\quad \oint\vec{B}\cdot d\vec{A}=0,\quad \oint\vec{E}\cdot d\vec{\ell}=-\frac{d}{dt}\int\vec{B}\cdot d\vec{A},$$

$$\oint\vec{B}\cdot d\vec{\ell}=\mu_0 I+\mu_0\epsilon_0\frac{d}{dt}\int\vec{E}\cdot d\vec{A},\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0},\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0,\quad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},\quad \nabla^2\vec{E}=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2},\quad \nabla^2\vec{B}=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2},\quad c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}},\quad E=cB,$$

$$\vec{J}=\sigma\vec{E},\quad I=\int\vec{J}\cdot d\vec{A},\quad I_D=\epsilon_0\frac{d\Phi_e}{dt}\quad \text{onde}\quad \Phi_e=\int\vec{E}\cdot d\vec{A},$$

$$\vec{E}=E_m\cos(kx-\omega t+\phi)\hat{e}_y,\quad \vec{B}=B_m\cos(kx-\omega t+\phi)\hat{e}_z,\quad k=\frac{2\pi}{\lambda},\quad \omega=\frac{2\pi}{T}.\quad k\,c=\omega,$$

$$\vec{S}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B},\quad S=uc,\quad u=u_e+u_m=\frac{\epsilon_0\,E^2}{2}+\frac{B^2}{2\mu_0},\quad I=<S>=\frac{E_m\,B_m}{2\mu_0},$$

$$<cos^2(kx-\omega t+\phi)>=1/2,\quad P_{rad}=\frac{2I}{c}\ \text{(reflexão total) e}\ P_{rad}=\frac{I}{c}\ \text{(absorsão total).}$$